Sexta práctica voluntaria | Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro | 19 de Abril de 2000

El objetivo de esta práctica es estudiar algoritmos de integración de problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideremos una pelota de tenis con masa m (0.05 [kg]) y diámetro d (0.063 [m]), moviéndose en el aire cerca de la tierra. La pelota rota sobre sí misma con una velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$ (este vector tiene la dirección del eje de rotación y como magnitud $\omega = d\phi(t)/dt$, donde $\phi(t)$ es el ángulo de rotación). Suponga coordenadas cartesianas xyz con el eje z en la dirección contraria a la gravedad terrestre.

Supondremos como modelo de la pelota un punto con masa moviéndose bajo las siguientes fuerzas

1. peso $\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{g}$, donde $\overrightarrow{g} = (0,0,-g)^\top$,
2. rozamiento viscoso $\overrightarrow{D} = -D_L(v)\overrightarrow{v}/v$, opuesta a la velocidad $\overrightarrow{v}$, y
3. fuerza de Magnus $\overrightarrow{M} = M_L\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}/(w\ v)$, que es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{\omega}$.

Utilizando la teoría de fluidos ideales podemos suponer

$$D_L(v) = \frac{C_D}{2}\frac{\pi d^2}{4}\rho v^2, \qquad M_L(v) = \frac{C_M}{2}\frac{\pi d^2}{4}\rho v^2,$$

donde ρ (1.29 [kg/m^3]) es la densidad del aire. Experimentos realizados con pelotas reales nos indican que

$$C_D = 0{,}508 + \left(\frac{1}{22{,}053 + 4{,}196\left(\frac{v}{w}\right)^{5/2}}\right)^{2/5}, \qquad C_M = \frac{1}{2{,}022 + 0{,}981\left(\frac{v}{w}\right)},$$

donde $w = d/2\ |\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}/v|$.

1. (a) Escriba las ecuaciones de Newton para el vector de posición $\overrightarrow{r}(t)$. (b) ¿Cuándo la trayectoria se mantendrá en un plano vertical? (c) En dicho caso, elija el plano vertical en la dirección del eje x y particularice las ecuaciones anteriores en dicho caso. (d) Escriba estas últimas ecuaciones como un sistema de EDO de primer orden. Nota: suponga como condiciones iniciales $x(0) = 0$, $z(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0\cos\theta$ y $\dot{z}(0) = v_0\sin\theta$.

2. Desarrolle un método numérico en Matlab para la resolución del sistema de ecuaciones obtenido en el apartado 1.(b). Dibuje la solución que obtiene para $h = 1[m]$, $v_0 = 25[m/s]$, $\theta = 15^o$ y $\omega = 20[m/s]$, en el vacío, en aire sin rotar y con aire rotando. Comente los resultados.

3. (a) Desarrolle un método de Runge-Kutta de 2do. orden explícito y aplíquelo a las ecuaciones del problema anterior. (b) Escriba los términos de truncado de este método. (c) Haga crecer el paso de tiempo, ¿para qué paso de tiempo el método dejar de ser estable? Justifique teóricamente dicho resultado.

4. (a) Desarrolle un método de Adams explícito de 2do. orden y aplíquelo a las ecuaciones del problema anterior. (b) Escriba los términos de truncado de este método.(c) Haga crecer el paso de tiempo, ¿para qué paso de tiempo el método dejar de ser estable? Justifique teóricamente dicho resultado.

5. (a) Desarrolle un método de Adams implícito de 2do. orden y aplíquelo a las ecuaciones del problema anterior. Nota: resuelva las ecuaciones no lineales del método utilizando el Método de Newton. (b) Escriba los términos de truncado de este método.(b) Haga crecer el paso de tiempo, ¿para qué paso de tiempo el método dejar de ser estable? Justifique teóricamente dicho resultado.

6. Compare los métodos anteriores en cuanto a precisión, estabilidad, coste computacional, etc. ¿Cuál dirías que es el mejor? Justifícalo.