Tercera relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 18 de Octubre de 1999

Realizar los siguientes ejercicios de repaso de Álgebra lineal.

1. Se define la traza de la matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ como la suma de los elementos de su diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que

   a) el término independiente del polinomio característico de A es igual a la suma de sus autovalores;

   b) la $\mathrm{tr}(A)$ es igual a la suma de los autovalores;

   c) la relación entre el radio espectral y la traza es

   $$\rho(A) \geq \frac{|\mathrm{tr}(A)|}{n};$$

   d) si A es hermítica y definida positiva, ¿puedes precisar más la relación entre su traza y su radio espectral?

2. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

   a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$,

   b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$,

   c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

   Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

3. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton para matrices diagonales. Este teorema afirma que toda matriz A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$.

4. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

   a) $\|A\,U\|_2 = \|U\,A\|_2 = \|A\|_2$, con A del mismo tamaño que U.

   b) $\|U\,x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n$,

   c) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U\,x$ y $U\,y$,

   d) $\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$, *e*) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

5. Dada la matriz A hermitiana demuestre que sus autovalores son reales y sus autovectores ortogonales. Además demuestre que A es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

6. Defina
$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$
¿Es invariante respecto a transformaciones de semejanza? ¿Cómo se calcula la exponencial de una matriz utilizando su forma canónica de Jordan? ¿Qué ventajas tiene? Ayuda: los bloques de Jordan son suma de una matriz diagonal y otra nilpotente.

7. Demuestre que para cualquier nomrma matricial asociada a una norma vectorial se verifica:
$$\|A\|\|A^{-1}\| \leq \frac{max(|\lambda|)}{min(|\lambda|)}$$
donde λ es autovalor de A.

8. Demuestre que si $A \in M^{nxn}(\mathbb{R})$ y $\rho(A) < 1$ entonces existe la inversa de $I - A$, coincide con $lim_{n\to\infty}(I + A + ... + A^n)$ y además se verifica
$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

9. Demuestre que si $A, B \in M^{nxn}(\mathbb{R})$, $det(A) \neq 0$ y $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces existe la inversa de B y además se verifica
$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|}$$

10. Considere la matriz $A \in M^{nxn}(\mathbb{R})$, demuestre:

    a) si $\|I - A\| < 1$ entonces $det(A) \neq 0$

    b) si $\|A\| < 1$ entonces $det(I - A) \neq 0$