Cuarta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 27 de Octubre de 2000

Métodos Directos para Problemas Algebraicos Lineales.

1. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante (estrictamente) por filas si
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$
Demuestre que A es invertible, es decir, existe su inversa A^{-1}.

2. Dado el sistema lineal, $Ax = b$, dado por
$$2{,}01\, x + 0{,}98\, y = 2{,}02, \qquad 0{,}98\, x + 2{,}02\, y = 2{,}01.$$
Calcula, y comenta los resultados,

   a) La solución exacta del problema
   b) La solución usando solamente dos cifras decimales y redondeo
   c) La solución usando solamente dos cifras decimales y truncado
   d) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y redondeo
   e) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y truncado
   f) El número de condición de A para el apartado $(2d)$.
   g) El número de condición de A para el apartado $(2e)$.
   h) El residuo y el error absoluto obtenidos en $(2d)$.
   i) El residuo y el error absoluto obtenidos en $(2e)$.

3. Resuelva el sistema
$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= 3, \end{aligned}$$
con el método de eliminación de Gauss, y calcule las matrices de permutación que le sean necesarias. Explique lo que hace y por qué lo hace. Resuelva dicho sistema por el método de factorización LU.

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con aritmética de cuatro dígitos (mantisa de 4 dígitos decimales),

$$
\begin{aligned}
0{,}1010 \times 10^{-2}\, x + 0{,}4004 \times 10^{-1}\, y &= 0{,}1140 \times 10^{-1}, \\
0{,}2002 \times 10^{0}\, x + 0{,}4012 \times 10^{1}\, y &= 0{,}1028 \times 10^{1},
\end{aligned}
$$

por medio de los siguientes métodos:

a) regla de Cramer,

b) eliminación de Gauss y en el orden en que se dan las ecuaciones,

c) eliminación de Gauss e intercambiando el orden de las ecuaciones,

d) eliminación de Gauss con pivotaje completo.

Explique sus resultados y calcule el número de condición de la matriz de coeficientes. ¿Es esta matriz simétrica?, ¿y definida positiva? ¿Cuáles son su determinante, sus autovalores y sus autovectores?

5. Calcule la solución exacta de $A\,x = b$ donde

$$
A = \begin{pmatrix} 1{,}6084 & 0{,}8165 \\ 0{,}8021 & 0{,}4196 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0{,}8019 \\ 0{,}4025 \end{pmatrix}.
$$

Calcule el vector x_c tal que $r = A\,x_c - b$ es exactamente igual a

$$
\begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{8} \end{pmatrix}.
$$

Calcule el número de condición de A usando norma infinito. Si el ordenador representa b exactamente (sin error), calcule el error relativo de A tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Si el ordenador no comete error al representar A, calcule el error relativo de b tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Repita los resultados anteriores en norma 1.

6. Una matriz de Hilbert $H^n = (h^n_{ij})$ tiene como elementos

$$
h^n_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \qquad 1 \le i, j \le n.
$$

¿Es simétrica y definida positiva? Si lo es, aplica la descomposición de Cholesky LL^T a la matriz H^4. A partir de ella calcula la descomposición modificada de Cholesky LDL^T.

7. Si $A = U^T U$ donde U es una matriz triangular superior con autovalores no nulos de multiplicidad geométrica igual a su multiplicidad algebraica, demuestre

    a) que A es simétrica y definida positiva,

    b) que A tiene inversa,

    c) la relación entre los autovalores de A y U,

    d) la relación entre los autovectores de A y U,

    e) la relación entre los autoespacios de A y U.

8. Demuestre que la inversa de una matrix nxn triangular superior inversible, es también una matriz triangular superior.

9. Demuestre que si A es una matriz nxn no singular y admite dos descomposiciones LU: $A = L_1U_1 = L_2U_2$ entonces existe una matriz diagonal tal que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

10. Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Doolittle y pivoteo parcial:

$$\begin{array}{cccc} & 2y & +z & = 3 \\ x & & -z & = 2 \\ x & -3y & & = 0 \end{array}$$

11. Calcular el número de condición relativo a la norma $\|\|_1$ con artimética de 3 y 4 cifras y redondeo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}003 & 58{,}09 \\ 5{,}55 & 321{,}8 \end{pmatrix}$$

12. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ (vector columna) con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz

$$A = I - 2\,w\,w^*.$$

    a) ¿A es simétrica?, ¿es hermítica?.

    b) ¿Qué puedes decir de sus autovalores? Demuéstrelo.

    c) ¿Qué puedes decir sobre su forma normal de Schur?

    d) ¿Se podría aplicar el método de Cholesky para factorizar la matriz A?, ¿por qué?

13. Para resolver el problema de condiciones de contorno

$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad y(x_l) = y_l, \quad y(x_r) = y_r,$$

donde a, b, y_l e y_r son constantes, se pueden usar diferencias finitas de la siguiente forma. Se define una malla $\{x_i\}$,

$$x_i = x_0 + hi, \qquad h = \frac{x_r - x_l}{n}, \qquad x_r = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_l,$$

se aproxima $y(x_i) \approx y_i$ y se aproximan las derivadas

$$y'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

dando lugar a la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + b\,y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax = b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

14. Escribe el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema tridiagonal:

$$\begin{array}{llllll}
a_1 x_1 & +b_1 x_2 & & & & = d_1 \\
c_2 x_1 & +a_2 x_2 & +b_2 x_3 & & & = d_2 \\
 & c_3 x_2 & +a_3 x_3 & +b_3 x_4 & & = d_3 \\
 & & & \cdots & & \\
 & & & c_n x_{n-1} & +a_n x_n & = d_n
\end{array}$$

Este algoritmo se conoce como método de Thomas para sistemas tridiagonales.