Quinta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 20 de Noviembre de 2000

Ejercicios de Métodos Iterativos para Ecuaciones Algebraicas.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + a\,y &= a \\ a\,x + y + b\,z &= b \\ b\,y + z &= c \end{aligned}$$

   *a*) Determine los valores de $a$ y $b$ para que el sistema tenga solución única

   *b*) Determine los valores de $a$ y $b$ para asegurar la convergencia del método de Gauss-Jacobi para la resolución de dicho sistema

   *c*) Determine los valores de $a$ y $b$ para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel

   *d*) Estudiar la convergencia de los métodos anteriores y el método de Cholesky para los valores de $a$ y $b$ para los que la matriz de los coeficientes del sistema es simétrica.

2. Sea $B$ una matriz real cuadrada de orden $n \times n$ tal que $B\,x = 0$ y $|B| = 0$.

   *a*) ¿Cuál es la relación entre $b_{ii}$ y $b_{ij}$, donde $B = (b_{ij})$?

   *b*) Si $B = A - \lambda\,I$ donde $\lambda$ son los autovalores de $A$, ¿cuál es la relación entre $\lambda$ y los coeficientes o elementos de la matriz $A$?

   *c*) ¿Cuál es la relación entre $|\lambda|_{\text{máx}}$ y $|\lambda|_{\text{mín}}$ y los elementos de $A$?

   *d*) Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$. Deduzca las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de esta matriz para que el método iterativo de Gauss-Jacobi converja cuando se utiliza para resolver el sistema $A\,x = b$.

3. Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$\begin{aligned} 10\,x_1 - 3\,x_2 \qquad &= 2 \\ -3\,x_1 + 10\,x_2 - 2\,x_3 &= 3 \\ -2\,x_2 + 10\,x_3 &= 5, \end{aligned}$$

es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación $w$ escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa $w$ tomando como valores iniciales $x = 0$. Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

4. ¿Puede converger un método iterativo para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$x^{(k)} = B\, x^{(k-1)} + c,$$

siendo $B$ una matriz singular ($|B| = 0$)?

5. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine

*a*) el vector $x$ tal que $A\,x = b$ por factorización de Cholesky,

*b*) $A^{-1}$ a partir de la factorización de Cholesky,

*c*) ¿converge el método de Gauss-Jacobi? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

*d*) ¿converge el método de Gauss-Seidel? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

*e*) calcula el polinomio característico de $A$, y calcula sus raíces (aplica Ruffini para la raíz unidad),

*f*) la descomposición LU (es decir, $A = L\,U$ donde $L$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y $U$ es una matriz triangular superior.

6. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

*a*) un método directo que, a su juicio, sea el más preciso, *b*) justifique el uso del método que utilizó en (a),

*c*) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Jacobi? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.

*d*) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.

*e*) utilice un parámetro de relajación $w$ y determine para qué valores de dicho parámetro un método de relajación converge. Para un valor $w \neq 0$ y $w \neq 1$, si para dicho valor el método converge, haga dos iteraciones y determine la tasa de convergencia del método de relajación que ha utilizado.

7. Para la resolución del sistema $B\,x = b$, donde $x, b \in \mathbb{R}^2$, se propone el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = b + A\,x^{(k)}, \qquad k \geq 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda, c \in \mathbb{R}.$$

*a*) ¿Para qué valores de $\lambda$ y $c$ existe solución única?

*b*) Sea $x_{PF}$ el punto fijo de la iteración. Calcule $x_{PF} - x^{(k)}$ para aquellos valores de $\lambda$ y $c$ para los que existe solución única. Suponga que $|\lambda| < 1$.

*c*) Para las condiciones del apartado (b), ¿cómo se comporta $\|x_{PF} - x^{(k)}\|_\infty$ y $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$, cuando $k \to \infty$? ¿Es la convergencia al punto fijo independiente de $c$? Justifique todos los resultados.

8. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos *a*) por factorización de Cholesky.

*b*) ¿Puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de $10^{-5}$.

*c*) ¿Puede resolver este sistema por el método del descenso más rápido? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia.

*d*) ¿Puede resolver este sistema por el método del gradiente conjugado? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de $10^{-5}$.

*e*) Desarrolle un método de relajación basado en el método del gradiente conjugado. Determine para qué valores del parámetro $w$ el método de relajación converge. ¿Cómo determinaría el $w$ óptimo? Itere tres veces el método que ha obtenido (con el $w$ óptimo).

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule su factorización LU por medio de los métodos de Doolittle y Crout. Calcule también la descomposición de Cholesky y la descomposición de Cholesky modificada ($L^\top DL$).

10. Dada un sistema tridiagonal $< a_i, b_i, c_i > x =< d_i >$,

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 \qquad\qquad\qquad &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \qquad\qquad &= d_2, \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 \qquad &= d_3, \\ \ddots \qquad\qquad & \\ a_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n &= d_n, \end{aligned}$$

escriba los algoritmos de Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel en detalle, en componentes.