Sexta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 24 de Noviembre de 2000

Problemas Algebraicos No Lineales.

1. El siguiente algoritmo se utiliza en ocasiones para calcular la raíz cuadrada de a:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

donde x_1 es un número positivo.

a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe, ¿cuál es su valor?

b) Si $a \le x_n \le 1$, ¿cuáles son A y B tales que $A \le x_{n+1} \le B$?

c) ¿Para qué valores de a converge la iteración?

d) Se trata del método del Newton, ¿aplicado a qué función?

2. Demuestre que si $g(x)$ satisface

a) $\exists I \subset [a,b]$ tal que $\forall x \in I$, $g(x)$ está definida y $g(x) \in I$ (es decir, $g : I \longrightarrow I$),

b) $g(x)$ es una función continua con derivada continua, $g \in \mathrm{C}^1[a,b]$,

c) $\exists k < 1$, $k > 0$, tal que $\forall x \in I$ entonces $|g'(x)| \le k$,

entonces $\exists \xi$ (punto fijo) tal que $\xi = g(\xi) \in I$.

3. Para calcular la raíz $\xi = 2$ de $x^2 - x - 2 = 0$, se propone la iteración $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, ¿converge dicha iteración?

4. Determine el intervalo I que cumple la siguiente propiedad: $\forall x_0 \in I$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge, donde

$$g(x) = x\,(2 - a\,x).$$

5. Establezca la convergencia de la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ con

$$g(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

6. Dada $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$. Demuestre que hay una raíz en $[0, 1]$. ¿Para qué valores de $x_0 \in [0, 1]$ converge la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\, e^{x_n/2}?$$

7. La ecuación $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$ también tiene una raíz en $x \in [4, 5]$ ¿Puede calcularla con la misma iteración del problema anterior? Determine una iteración que converja para dicha raíz (si existe ésta).

8. Para las ecuaciones

   a) $x^3 - x - 1 = 0$,

   b) $e^{-x} - \cos x = 0$,

   determine una iteración funcional y un intervalo $x \in [a, b]$ para que dicha iteración converge a la raíz positiva más pequeña.

9. *a*) Considere el método de Newton-Raphson para calcular las raíces de $f(x) = 0$ expresado en la forma $x_{n+1} = g(x_n)$. Suponga que para el punto fijo α, se cumple que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. ¿Cuáles son los valores de $g'(\alpha)$ y $g''(\alpha)$?

   b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, ¿converge el método de Newton cuadráticamente?

   c) ¿Qué orden de convergencia tiene la iteración

   $$x_{n+1} = x_n - 2\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n),$$

   del método de Newton para $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$?

   d) Establezca las condiciones bajo las cuales el método de Newton converge cúbicamente.

10. Encontrar aproximaciones con 3 cifras decimales exactas de todos los ceros del polinomio $x^4 - 4x^2 - 3x + 5$ utilizando el método de Newton y deflacción para las raíces reales y el método de Bairstow para las raíces complejas si es que las tiene. Haz un estudio previo para localizar las raíces reales utilizando los polinomios de Sturm.

11. Considere el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{u}(x, y) = 0$, donde

$$u_1(x, y) = x^2 + x\,y - 10,$$

$$u_2(x, y) = y + 3x\,y^2 - 57.$$

   a) ¿Cuáles son las soluciones exactas de este problema?

   b) Considere un método de iteración de punto fijo de Picard a partir de la condición inicial $(x, y) = (1{,}5, 3{,}5)$. Obtenga dos iteraciones. ¿Converge dicho método?

   c) Caso de que no converja, presente otro método de punto fijo que sí sea convergente. Obtenga dos iteraciones. ¿Cómo demuestra que converge su nuevo método?

   d) Aplique el método de Newton-Raphson a partir de la misma condición inicial. Obtenga dos iteraciones. ¿Converge dicho método?

   e) De los tres métodos presentados, ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

12. Calcule los ceros del polinomio $z^6 - 1$, con variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

   a) Calcule los ceros de forma exacta.

   b) Aplique el método de Newton considerando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (use $z = a + \imath b$).

   c) ¿Cómo determinará estimaciones iniciales de las raíces que garanticen que el método de Newton converge para dichas estimaciones?

   d) Determine estimaciones iniciales para las tres primeras raíces (en el primer cuadrante) que garanticen la convergencia del método de Newton.

   e) Itere tres veces el método de Newton para las raíces anteriores. ¿Cuán precisas son los resultados que obtiene?

13. Calcularemos los ceros de $\sin^6 z - 1 = 0$. ¿Cuáles son las soluciones exactas de esta ecuación? Sustituya $z = a + \imath b$ y obtenga un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnicas. Aplique el método de Newton a dicho sistema en formulación delta. Aplique un método de Gauss-Seidel con relajación para resolver las ecuaciones en dicha formulación.