Séptima relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro, Carmen M. García — 10 de Enero de 2001

Ejercicios de cálculo de raíces de sistemas de ecuaciones no lineales y de interpolación.

1. Considere el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{u}(x, y) = 0$, donde

$$u_1(x, y) = x^2 + x\,y - 10,$$

$$u_2(x, y) = y + 3x\,y^2 - 57.$$

   a) Una solución de este problema es $x = 2$ e $y = 3$. Compruébelo.

   b) ¿Cuántas soluciones exactas hay? ¿Cuántas son reales? ¿Cuántas son positivas? ¿Cuántas son complejas? Ayuda: utiliza las sucesiones de Sturm, caso de que necesites acotar las raíces de un polinomio.

   c) Considere un método de iteración de punto fijo de Picard a partir de la condición inicial $(x, y) = (1{,}5, 3{,}5)$, que está próxima a la solución exacta dada. Obtenga dos iteraciones. ¿Converge dicho método?

   d) Caso de que no converja, presente otro método de punto fijo que sí sea convergente (ayuda: utilice Picard con relajación). Obtenga dos iteraciones. ¿Cómo demuestra que converge su nuevo método?

   e) Aplique el método de Newton-Raphson a partir de la misma condición inicial. Obtenga dos iteraciones. ¿Converge dicho método?

   f) De los tres métodos presentados, ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

2. Calcule los ceros del polinomio $z^6 - 1$, con variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

   a) Calcule los ceros de forma exacta.

   b) Aplique el método de Newton considerando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (use $z = a + \imath b$).

   c) ¿Cómo determinará estimaciones iniciales de las raíces que garanticen que el método de Newton converge para dichas estimaciones?

d) Determine estimaciones iniciales para las raíces que se encuentren en el primer cuadrante que garanticen la convergencia del método de Newton.

e) Itere tres veces el método de Newton para las raíces anteriores. ¿Cuán precisas son los resultados que obtiene?

3. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 2 tal que

$$p(x_0) = y_0, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_1) = y'_1.$$

4. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_2) = y'_2,$$

donde $x_i = x_0 + i\,h$ e y_i, y'_0, y'_2 son dadas.

5. Sea $p_2(x)$ un polinomio cuadrático que interpola la función $f(x)$ en los puntos x_0, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$; ¿cuál es el error de $f'(x_i) - p'_2(x_i)$, $i = 0, 1, 2$? Suponga que $f \in \mathrm{C}^3[x_0, x_2]$ y calcule cotas para estos errores.

6. Dados los valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, donde $f(x)$ es una función estrictamente creciente. El polinomio interpolador puede usarse para determinar los ceros de la función $f(x) = 0$. Por ejemplo, los métodos de regula falsi y de Müller se basan en este procedimiento. Utilice la interpolación para determinar la función inversa $x(f)$ y los ceros de la función f. Determine los errores de interpolación que comete.

7. Calcule una cota inferior del error de interpolación $|f(x) - p_n(x)|$ para $f(x) = \ln x$, $n = 3$ en el punto $x = 3/2$, si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/3$ y $x_3 = 2$.

8. Sea la tabla de valores

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Interpole dicha tabla de valores con (1) polinomios lineales a trozos (explicado en clase), (2) splines cuadráticas (con derivada continua, y no explicadas en clase, pero fáciles de derivar), y (2) con splines cúbicas (explicadas en clase). Compare el valor en $x = 5$ con los tres métodos.