Novena relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 14 de Febrero de 2001

Ejercicios de derivación e integración numéricas.

1. Determina la fórmula de diferenciación regresiva de 3 puntos. Utiliza el método del desarrollo de Taylor para determinar una fórmula que aproxime $f'(x)$ utilizando los valores de $f(x)$, $f(x-h)$ y $f(x-2h)$ $(h>0)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula?

2. Determina una fórmula para aproximar $f''(x)$ como una combinación lineal de los valores $f(x \pm h)$ y $f(x \pm 2h)$ $(h>0)$. ¿Qué error se comete en la aproximación?

3. Dada la siguiente tabla de valores

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,70010	0,40160	0,10810	−0,17440	−0,43750

y trabajando con aritmética de cinco cifras decimales, calcule:

a) La derivada primera de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h (espaciado entre puntos). Una vez calculados estos valores, determine $f'(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

b) La derivada segunda de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h. Una vez calculados estos valores, determine $f''(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

c) El polinomio de interpolación de $f(x)$. Una vez calculado este polinomio determine a partir de él los valores $f'(0{,}3)$ y $f''(0{,}3)$.

d) El valor de

$$\int_{0,1}^{0,5} f(x)\,dx,$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta.

e) El punto x_F tal que $f(x_F) = 0$ con $0{,}3 \le x_F \le 0{,}4$.

f) El punto x_T tal que

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x)\,dx = 0{,}1020.$$

4. Una regla de integración gaussiana o de Gauss se define como

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

donde los w_j son pesos positivos y la ecuación anterior debe satisfacerse para todos los monomios de grado $\leq n$. Calcule w_j y x_j para $w(x) \equiv 1$ y (1) n=1, y (2) n=2. Compare los x_j que ha obtenido con los ceros de los polinomios de Legendre.

5. Considere el método de integración de Gauss

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

con $n = 1$ y $n = 2$, y

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Deduzca w_j y x_j. ¿Cuál es la relación entre x_j y las raíces de los polinomios de Chebyshev?

6. Determine el error cometido cuando

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p_n(x)\, dx,$$

para $n = 0, 1$ y donde p_n es un polinomio interpolante de $f(x)$ de grado n.

7. En la regla de integración de Simpson se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4\, f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right).$$

Suponga que al aplicar dicha regla se cometen errores de redondeo ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 al evaluar $f(a)$, $f((a+b)/2)$ y $f(b)$, respectivamente. Estudie como afectan estos errores de redondeo al error de integración de la fórmula de Simpson.

8. La ecuación de Laguerre es

$$x\, \frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\, \frac{dy}{dx} + n\, y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto (Sturm-Liouville). Desarrolle el método de integración de Gauss-Laguerre, es decir, el método de Gauss basado en polinomios ortogonales de Laguerre.

9. La ecuación de Hermite es

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + 2\,n\,y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto. ¿Cómo evaluaría la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

utilizando las autofunciones de la ecuación de Hermite?

10. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx,$$

b)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4\,e^{-x^2}\,dx.$$