

Ejercicios de resolución numérica de problemas de condiciones de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Resuelva analíticamente los siguientes problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias:

a)  $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

b)  $y'' = 0; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0.$

c)  $y'' + 2y' - 3y = 9x; \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 2.$

d)  $y'' = 2; \quad y(-1) = 5, \quad y(1) - 2y'(1) = 1.$

e)  $x'' - 2x' + x = 0; \quad x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta.$

2. En analogía con la solución de sistemas lineales  $Ax = b$ , para los que

$$x_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} b_k, \quad B = A^{-1},$$

Green introdujo a finales del siglo pasado las funciones fundamentales o funciones de Green. Considere  $A = D^2$  y el problema de contorno

$$D^2 x(t) = x''(t) = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0,$$

demuestre que se resuelve mediante la fórmula

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds,$$

donde la función de Green para este problema es ( $\int_0^1 G \approx (D^2)^{-1}$ )

$$G(t, s) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(s-1), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

3. Aplique el método del disparo para resolver el problema

$$x'' = -9x, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/6) = 5.$$

¿Cómo cambia el resultado si  $x(\pi/3) = 5$ ?

4. Para el problema

$$x'' = -2t(x')^2, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \beta = 1 + \pi/4,$$

el método del disparo, se basa en resolver la ecuación

$$x_z'' = -2t(x_z')^2, \quad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

de modo que  $\phi(z) \equiv x_z(1) - \beta = 0$ . Determine la función  $\phi(z)$  e indique cómo la resolvería mediante el método de Newton.

5. Resuelva el siguiente problema de valores en el contorno

$$x'' + 2x' + 10t = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(1) = 2,$$

para  $x(1/2)$  mediante diferencias finitas con tamaño de malla  $h = 1/4$ .

6. Determine la solución numérica aproximada del problema

$$-u'' = x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante el método de elementos finitos en el espacio  $V_h^{(1)}$  de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla  $h = 1/4$ . Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

7. Resuelva el problema

$$-((1+x)u'(x))' = 1 + (1+3x-x^2)\exp(-x), \quad 0 < x < 1$$

con  $u(0) = u(1) = 0$ , mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^q \xi_j \sin(j\pi x).$$

para  $q = 3$ . Para calcular las integrales que le surjan utilice la regla del trapecio.

8. Aplique el método de Elementos Finitos cG(1), que usa polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) + u(1) = 0, \quad u'(1) = 2,$$

donde  $a(x) = 1 + x$  y  $f(x) = \sin(x)$ . Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución.