

Repaso de Cálculo (algunos teoremas): NO ENTRA EN EXAMEN

1. **Teorema de Bolzano.** Dada $f(x) \in C^0[a, b]$; si $f(\alpha) \leq \gamma \leq f(\beta)$ con $\alpha, \beta \in [a, b]$, entonces $\exists \xi$ tal que $\gamma = f(\xi)$ con $\xi \in [a, b]$.
2. **Teorema.** Si $f(x) \in C^0[a, b]$, y $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ y g_1, g_2, \dots, g_n son números reales del mismo signo, entonces

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) g_i = f(\xi) \sum_{i=1}^n g_i, \quad \xi \in [a, b].$$

3. **Teorema del valor medio.** Sea $f(x) \in C^0[a, b]$ y $g(x)$ sea o positiva estricta o negativa estricta e integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \quad \xi \in [a, b].$$

4. **Teorema.** Sea $f(x) \in C^0[a, b]$ y $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces $f(x)$ alcanza su máximo y mínimo en $[a, b]$, es decir, $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ tales que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

5. **Teorema de Rolle.** Sea $f(x) \in C^0[a, b]$, $[a, b]$ acotado y $f'(x) \in C^0(a, b)$. Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.
6. **Teorema.** Sea $f(x) \in C^0[a, b]$, $[a, b]$ acotado y $f'(x) \in C^0(a, b)$. Entonces $\exists \xi$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \xi \in (a, b)$$

7. **Teorema del resto (integral) de Taylor.** Sea $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ y $c \in [a, b]$. Entonces

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_{n+1}(x)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x - s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

8. **Teorema.** Sea $f(x, y, \dots, z) \in C^1$, $x = x(t), y = y(t), \dots \in C^1$ y

$$g(t) = f(x(t), y(t), \dots, z(t)),$$

entonces

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial z} z'.$$

9. **Teorema.** Sea $f(x, y) \in C^2$ en un entorno del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe (ξ, η) en un entorno de (a, b) tal que

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + R_2(x, y)$$

donde

$$R_2 = f_{xx}(\xi, \eta) \frac{(x - a)^2}{2} + f_{xy}(\xi, \eta)(x - a)(y - b) + f_{yy}(\xi, \eta) \frac{(y - b)^2}{2}.$$

10. **Teorema fundamental del álgebra.** Sea un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$. Entonces $p(x)$ tiene por lo menos un cero ξ tal que $p(\xi) = 0$.

11. **Lema.** Sean z_1, z_2, \dots, z_k ceros del polinomio $p(x)$ entonces

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_k) r(x),$$

(en esta expresión se deben contar las multiplicidades de los ceros).

12. **Lema.** Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado $\leq k$ que coinciden en los puntos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k$, es decir, tales que $r(x) = p(x) - q(x)$ tiene estos puntos como ceros. Entonces $p(x) \equiv q(x)$.

13. **Teorema.** Dada la función real $f(x)$ y los puntos x_0, x_1, \dots, x_n que son distintos, existe un único polinomio de grado $\leq n$ que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, \dots, x_n , es decir, que tiene el mismo valor en dichos puntos.

14. **Teorema.** Sea $f(x) \in C^0(a, b]$. Entonces el problema diferencial

$$\begin{cases} u'(x) = f(x), & a < x \leq b \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

tiene como solución única

$$u(x) = u_0 + \int_a^x f(y) dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Notese que este teorema es válido si $f(x)$ es continua a trozos.