Segunda relación de problemas | Técnicas Numéricas
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García | 4 de Octubre de 2002

Aritmética de ordenadores y análisis de errores.

1. Encuentre la expresión binaria de los números 1/10, 5 y 10/3 y escriba su representación en binario mediante el formato IEEE-754 de simple precisión.

2. Expresa en el sistema decimal los siguientes números representados en binario mediante el formato IEEE-754 de simple precisión:

   a) 1 10000001 01000000000000000000000

   b) 0 10001000 00000000000000010101001

   c) 1 00000000 00001000001000010000010

3. Realizar un análisis de propagación de errores hacia atrás y otro hacia adelante para la suma de n pares de productos dada por

$$s = a_1^2\, b_1 + a_2^2\, b_2 + \cdots + a_n^2\, b_n.$$

   Suponga que los datos son números flotantes y por tanto sin error de redondeo. Además suponga, para simplificar, que el error relativo de las operaciones de suma y producto es el mismo.

4. Con una mantisa de cuatro cifras decimales, calcule las raíces de

$$x^2 + 0{,}4\, x + 0{,}8002 \cdot 10^{-4} = 0.$$

   Explique sus resultados. ¿Puede mejorar estas raíces (utilizando aritmética de 4 cifras solamente)? ¿Cómo? ¿Por qué?

5. Estime el error en la evaluación de

$$f(x) = \sin x\, exp(-10\, x^2),$$

   para $x = 2$, si el error absoluto en x es 10^{-6}.

6. Resuelva el sistema de dos ecuaciones lineales

$$0{,}872\, x + 0{,}345\, y = 0{,}217,$$
$$0{,}475\, x + 0{,}003\, y = 0{,}271,$$

   con cuatro y con tres cifras significativas, y compare los resultados con los de la solución exacta. Justifique los resultados obtenidos. Nota: si utiliza una calculadora, redondee los resultados intermedios.

7. Estudie la estabilidad de Hadamard del siguiente problema de valores iniciales
$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \qquad y(0) = a, \qquad \frac{dy}{dx}(0) = b,$$

8. ¿Cómo se debe evaluar la función $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \alpha}$ para valores de α próximos a 0 para evitar diferencias cancelativas?

9. (Primer parcial curso 2001/02) Describa la regla de Horner para evaluar un polinomio, sea
$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0.$$
Realice un análisis de propagación de errores hacia adelante suponiendo que los coeficientes tienen un error flotante de representación fijo, $fl(a_i) = a_i(1+\epsilon)$.

10. (Examen Julio curso 2001/02) ¿Qué es un análisis de propagación de errores hacia atrás? Suponga la siguiente combinación lineal, que surge en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales,
$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{b_i\, x}, \qquad A_i, b_i, x \in \mathbb{R}.$$
¿Cuáles son los errores absolutos y relativos en los datos de esta expresión (x, A_i y b_i)? Suponga que todos estos errores están acotados por el épsilon de la máquina ε. Realice un análisis de propagación de errores hacia atrás de dicha combinación lineal y determine los errores absolutos y relativos en el resultado. Comente el resultado que ha obtenido. Si los A_i y los b_i están ordenados en módulo, es decir, si $|A_i| < |A_{i+1}|$ y $|b_i| < |b_{i+1}|$, ¿qué términos introducen más errores, los primeros o los últimos? Conviene, a la hora de obtener menor error total, ordenar las A y las b, ¿cuál es la mejor ordenación posible? NOTA: considere separadamente las b y las A, y luego los efectos conjuntos, ello le facilitará la presentación de conclusiones.