Tercera relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 18 de Octubre de 2002

Realizar los siguientes ejercicios de repaso de Álgebra lineal.

1. Se define la traza de la matriz cuadrada A como la suma de los elementos de su diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios. Ayuda: el teorema de Schur le puede ser útil.

2. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$. Ayuda: Utilice la forma canónica de Jordan de A.

3. Calcule el rango, los autovalores y autovectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   ¿Cuál es la solución de $A\,x = 0$? ¿Por qué?

4. Demuestre que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

   es una norma. Demuestre también que su norma matricial asociada

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   cumple los axiomas de una norma.

5. Demuestre que si P es una matriz ortogonal ($P^\top P = I$), entonces $\|P\,x\|_2 = \|x\|_2$.

6. ¿Cuándo $A\,x = \lambda\,x$ implica que $A^{-1}\,x = \lambda^{-1}\,x$?

7. Dada la matriz A y su traspuesta conjugada A^*, demuestre que

   a) $B = A\,A^*$ es una matriz hermítica,

   b) los autovalores de B son reales y positivos *c*) $A\,x = 0$ si y sólo si $B^*\,x = 0$.

8. Dada la matriz cuadrada A con $\rho(A) < 1$, demuestre que

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

9. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\,y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Calcule los autovalores y autovectores/autofunciones de esta ecuación. ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Discreticemos el espacio x de tal manera que haya $(N+1)$ puntos espaciados en $1/N$; es decir, llamando $\Delta x = 1/N$,

$$x_i = \frac{i-1}{N} = (i-1)\,\Delta x, \qquad i = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Aproximemos la segunda derivada por la fórmula en diferencias

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta^4\right),$$

donde $x_i = i\,\Delta x$ y $y_i \approx y(x_i)$ y de tal manera que la ecuación de partida evaluada en el punto x_i venga dada por

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda\,y_i = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$y_{i+1} + (w-2)\,y_i + y_{i-1} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, N,$$

donde $w = \lambda\,\Delta x^2$, y $y_1 = y_{N+1} = 0$. Definiendo $\Lambda = w - 2$, tenemos

$$y_{i+1} + \Lambda\,y_i + y_{i-1} = 0, \qquad y_1 = y_{N+1} = 0.$$

¿Cuáles son los autovalores Λ de esta sistema de ecuaciones? ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Para los casos $N = 2$ y $N = 3$ calcule los autovalores Λ y relaciónelos con los λ de la ecuación diferencial ordinaria. ¿Cuál es esa relación? ¿Por qué? ¿Qué es lo que se ha perdido/ganado en la discretización?

10. Calcular $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ y $\rho(A)$ para

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Demostrar que la inversa de una matriz triangular es otra matriz triangular.

12. Demostrar que

$$\|A\| \, \|A^1\| \leq \frac{\text{máx}_i |\lambda_i|}{\text{mín}_i |\lambda_i|},$$

donde λ_i son los autovalores de A.

13. **Examen 17/Diciembre/1996**. Dada $\|x\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n} |x_i|$, determine su norma matricial asociada $\|A\|_\infty$ y demuestre que realmente es una norma submultiplicativa y consistente con la norma vectorial a la que está asociada. Demuestre también que (para cualquier norma matricial) $\|I\| \geq 1$ y $\|A^{-1}\| \geq 1/\|A\|$.