Quinta relación de problemas — Técnicas Numéricas
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 29 de Noviembre de 2002

Ejercicios de Métodos Iterativos para Ecuaciones Algebraicas.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + a\,y &= a \\ a\,x + y + b\,z &= b \\ b\,y + z &= c \end{aligned}$$

   a) Determine los valores de a y b para que el sistema tenga solución única

   b) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Jacobi para la resolución de dicho sistema

   c) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel

   d) Estudiar la convergencia de los métodos anteriores y el método de Cholesky para los valores de a y b para los que la matriz de los coeficientes del sistema es simétrica.

2. Sea B una matriz real cuadrada de orden $n \times n$ tal que $B\,x = 0$ y $|B| = 0$.

   a) ¿Cuál es la relación entre b_{ii} y b_{ij}, donde $B = (b_{ij})$?

   b) Si $B = A - \lambda\,I$ donde λ son los autovalores de A, ¿cuál es la relación entre λ y los coeficientes o elementos de la matriz A?

   c) ¿Cuál es la relación entre $|\lambda|_{\text{máx}}$ y $|\lambda|_{\text{mín}}$ y los elementos de A?

   d) Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$. Deduzca las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de esta matriz para que el método iterativo de Gauss-Jacobi converja cuando se utiliza para resolver el sistema $A\,x = b$.

3. Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$\begin{aligned} 10\,x_1 - 3\,x_2 \quad &= 2 \\ -3\,x_1 + 10\,x_2 - 2\,x_3 &= 3 \\ -2\,x_2 + 10\,x_3 &= 5, \end{aligned}$$

es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación w escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa w tomando como valores iniciales $x = 0$. Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

4. ¿Puede converger un método iterativo para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$x^{(k)} = B\, x^{(k-1)} + c,$$

siendo B una matriz singular ($|B| = 0$)?

5. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine

a) el vector x tal que $A\,x = b$ por factorización de Cholesky,

b) A^{-1} a partir de la factorización de Cholesky,

c) ¿converge el método de Gauss-Jacobi? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

d) ¿converge el método de Gauss-Seidel? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

e) calcula el polinomio característico de A, y calcula sus raíces (aplica Ruffini para la raíz unidad),

f) la descomposición LU (es decir, $A = L\,U$ donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y U es una matriz triangular superior.

6. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

a) un método directo que, a su juicio, sea el más preciso, *b*) justifique el uso del método que utilizó en (a),

c) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Jacobi? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.

d) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.

e) utilice un parámetro de relajación w y determine para qué valores de dicho parámetro un método de relajación converge. Para un valor $w \neq 0$ y $w \neq 1$, si para dicho valor el método converge, haga dos iteraciones y determine la tasa de convergencia del método de relajación que ha utilizado.

7. Para la resolución del sistema $B\,x = b$, donde $x, b \in \mathbb{R}^2$, se propone el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = b + A\,x^{(k)}, \qquad k \geq 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda, c \in \mathbb{R}.$$

a) ¿Para qué valores de λ y c existe solución única?

b) Sea x_{PF} el punto fijo de la iteración. Calcule $x_{PF} - x^{(k)}$ para aquellos valores de λ y c para los que existe solución única. Suponga que $|\lambda| < 1$.

c) Para las condiciones del apartado (b), ¿cómo se comporta $\|x_{PF} - x^{(k)}\|_\infty$ y $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$, cuando $k \to \infty$? ¿Es la convergencia al punto fijo independiente de c? Justifique todos los resultados.

8. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos *a*) por factorización de Cholesky.

b) ¿Puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de 10^{-5}.

c) ¿Puede resolver este sistema por el método del descenso más rápido? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia.

d) ¿Puede resolver este sistema por el método del gradiente conjugado? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de 10^{-5}.

e) Desarrolle un método de relajación basado en el método del gradiente conjugado. Determine para qué valores del parámetro w el método de relajación converge. ¿Cómo determinaría el w óptimo? Itere tres veces el método que ha obtenido (con el w óptimo).

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule su factorización LU por medio de los métodos de Doolittle y Crout. Calcule también la descomposición de Cholesky y la descomposición de Cholesky modificada ($L^\top DL$).

10. Dada un sistema tridiagonal $< a_i, b_i, c_i > x =< d_i >$,

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 \qquad\qquad &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \qquad &= d_2, \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 \qquad &= d_3, \\ \ddots \qquad & \\ a_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n &= d_n, \end{aligned}$$

escriba los algoritmos de Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel en detalle, en componentes.