Sexta relación de problemas Técnicas Numéricas
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García López 02 de Diciembre de 2002

Ejercicios sobre problemas de valores propios.

1. Para la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
dibuje (aproximadamente) los discos de Gershgorin y encuentre una cota para su radio espectral. ¿Cómo determinaría una cota superior y otra inferior para el radio espectral de una matriz utilizando su norma 1? Aplique su respuesta a la matriz del enunciado.

2. Aproxime el radio espectral de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
mediante dos iteraciones del método de la potencia y utilizando la norma infinito para determinar el valor absoluto de los autovalores. Como vector inicial tome $(1,1,1)^\top$.

3. Una manera rápida de aplicar el método de la potencia es trabajar sólo con potencias de dos, es decir,
$$x^{(k)} = A^{2^k}\, x^{(0)}, \quad A^{2^k} = A^{2^{k-1}}\, A^{2^{k-1}}.$$
Adapte el método de la potencia para trabajar en este caso. El método de los cuadrados es más económico para iteraciones grandes. ¿Cómo evitará el desbordamiento en este método?.

4. Si el método de la potencia se aplica a una matriz real con un vector inicial también real, ¿qué sucederá si el valor propio dominante es complejo? ¿Se puede aplicar el método en dicho caso?

5. Calcule la factorización QR de la siguiente matriz utilizando reflexiones de Householder
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

6. Calcule la forma superior de Hessenberg utilizando reflexiones de Householder de la matriz
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

7. Calcule la forma superior de Hessenberg utilizando reflexiones de Householder de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Cómo aplicaría el algoritmo QR con desplazamiento (de Francis) para calcular los autovalores de la siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. En el método de la potencia escribimos
$$x^{(k)} = A^k\, x^{(0)} = \lambda_1^k\, (u^{(1)} + \epsilon^{(k)}),$$
donde λ_1 es el autovalor de A de mayor módulo, $u^{(1)}$ es su autovector asociado y $\epsilon^{(k)}$ es el vector de errores. Para determinar el autovalor podemos calcular el tamaño de los vectores $x^{(k)}$ mediante un funcional $\phi(x)$ lineal (por ejemplo, una norma o alguna de las componentes). De esta forma podemos escribir los cocientes
$$r_k = \frac{\phi(x^{(k+1)})}{\phi(x^{(k)})} = \lambda_1\, \frac{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k+1)})}{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k)})},$$
que tienden a λ_1 cuando $k \to \infty$. Demuestre que los errores relativos cumplen con
$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_k,$$
donde los números c_k forman una sucesión convergente (y por tanto acotada). Además, demuestre que la iteración r_k converge linealmente a λ_1.