Séptima relación de problemas — Técnicas Numéricas
Francisco R. Villatoro, Carmen M. García — 12 de Marzo de 2003

Ejercicios de aproximación de funciones (TEMA 7 segunda parte).

1. Algunos métodos de aproximación para una función $f(x)$ se basan en la definición de un funcional

$$F(f) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij} \, \frac{d^j f}{dx^j}(x_{ij}) + E(f),$$

tal que $E(f) = 0$ cuando f es un polinomio de grado

$$N = \sum_{j=0}^{n} m_j - 1,$$

donde w_{ij} son pesos. Como un polinomio no es más que una combinación lineal de monomios x^k, tenemos que basta probar que

$$E(x^k) = 0, \qquad F(x^k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij} \, \frac{d^j x^k}{dx^j}(x_{ij}),$$

para $k \leq N$. Dados $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$, desarrolle un método como el indicado más arriba y aproxime o calcule los valores aproximados de

$$f(\frac{a+b}{2}), \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Calcule los cuatro primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

3. Calcule los cuatro primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

4. Calcule los tres primeros polinomios de Laguerre para $x \in [0, \infty)$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

5. Calcule los tres primeros polinomios de Hermite para $x \in (-\infty, \infty)$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

6. Calcule los cuatro primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

7. Calcule los cuatro primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

8. Calcule el polinomio de grado ≤ 3 tal que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \left(e^x - p(x)\right)^2 \, dx.$$

9. Dada una función $f(x)$ de la que sólo se conocen sus valores $f(x_n)$ donde

$$x_n = 10 + \frac{n-1}{5}, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6.$$

   Determine una parábola que aproxime esta función mínimo-cuadráticamente.

10. Haga el ejercicio anterior pero usando polinomios ortogonales con respecto a una función peso $r(x) = w(x) = 1$. ¿Cuál es la diferencia más significativa entres las soluciones de los dos ejercicios?