Undécima relación de problemas — Técnicas Numéricas
Carmen M. García y Francisco R. Villatoro — 21 de Mayo de 2003

Ejercicios de resolución numérica de problemas de valores iniciales de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Dada una función analítica $y(x)$ (con serie de Taylor convergente) y un paso de tiempo h, se define el operador en diferencias finitas E como

$$Ey(t) = y(t+h) = y(t) + hDy(t) + \frac{h^2}{2} D^2 y(t) + O\left(h^3\right),$$

donde el operador derivada $Dy(t) = dy/dt$. Podemos escribir simbólicamente (como operador pseudo-diferencial)

$$Ey(t) = y(t+h) = \exp(h\,D) y(t), \qquad E^{-1} y(t) = y(t-h) = \exp(-h\,D) y(t).$$

Los operadores de diferencias finitas hacia adelante (forward), hacia atrás (backward) y centrado (centered) se definen como

$$\Delta = E - 1, \qquad \nabla = 1 - E^{-1}, \qquad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}.$$

Determina una expresión exacta para D y para D^2 en función de los operadores Δ, ∇ y δ.

2. Calcule y(0.1) resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -xy^2, \qquad y(0) = 2$$

utilizando un método de Taylor de orden 2.

3. Deduzca las fórmulas de Runge-Kutta de tercer orden con tres estados, es decir, determine los valores c_r, a_r y $b_{r,s}$ con $r = 1, 2, 3$ y $s = 1, ..., r-1$ tales que el método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h\phi(x_n, y_n, h), \\ \phi(x, y, h) &= \sum_{r=1}^{3} c_r k_r, \\ k_1 &= f(x, y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_r &= f(x + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{r,s}k_s), \\
a_r &= \sum_{s=1}^{r-1} b_{r,s}, \qquad r = 2, 3
\end{aligned}
$$

es de orden 3.

4. Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

y un método predictor-corrector cuyo corrector es un Adams-Moulton de cuarto orden, es decir,

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\, f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19\, f(x_n, y_n) - 5\, f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad x_n = n\, h, \qquad y_n = y(x_n),$$

describa cómo aplicaría dicho método y bajo qué condiciones converge. ¿Cual es el error de truncado del método de Adams-Moulton usado como corrector? Analiza también su estabilidad lineal.

5. Para el método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37\, f_{n-2} - 9\, f_{n-3}),$$

(a) calcule el error de truncado, y (b) analice la estabilidad lineal.

6. Determine los coeficientes de un método multipaso de la forma

$$y_{n+1} = y_n + h\,[A f_n + B f_{n-2} + C f_{n-4}]$$

para que integre correctamente una ecuación de la forma $y' = a + bx + cx^2$. Estudie el error de truncado del método que resulta.

7. Calcule el orden de precisión y la estabilidad del método

$$y_{n+1} = 4\, y_n - 3\, y_{n-1} + 2\, h\, f_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

¿Cómo arrancaría dicho método? ¿Por qué?

8. Determine el orden de exactitud y los errores de truncado del método

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n+1}) + \frac{h}{4}\left(4\,y'_{n+1} - y'_n + 3\,y'_{n-1}\right), \qquad n \geq 1,$$

y analice su estabilidad, consistencia y convergencia hacia la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$. ¿Necesita arranque dicho método? ¿Cómo lo arrancaría? Justifique sus respuestas.

9. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x, y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\,(y''_n - y''_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).$$

¿Cuál es el orden de exactitud y errores de truncado de este método? Analice la estabilidad de este método.

10. Considere el método

$$y_{n+1} = 2\,y_{n-1} - y_n + h\left(\frac{5}{2}\,f_n + \frac{1}{2}\,f_{n-1}\right).$$

Determine el error de truncado, la estabilidad, la consistencia y la convergencia de este método.