Duodécima relación de problemas | Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García | 21 de Mayo de 2003

Ejercicios de resolución numérica de problemas de condiciones de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Resuelva analíticamente los siguientes problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias:

   *a*) $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

   *b*) $y'' = 0; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0.$

   *c*) $y'' + 2y' - 3y = 9x; \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 2.$

   *d*) $y'' = 2; \quad y(-1) = 5, \quad y(1) - 2y'(1) = 1.$

   *e*) $x'' - 2\,x' + x = 0; \quad x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta.$

2. En analogía con la solución de sistemas lineales $Ax = b$, para los que

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} b_k, \qquad B = A^{-1},$$

   Green introdujo a finales del siglo pasado las funciones fundamentales o funciones de Green. Considere $A = D^2$ y el problema de contorno

$$D^2 x(t) = x''(t) = f(t), \qquad x(0) = x(1) = 0,$$

   demuestre que se resuelve mediante la fórmula

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f(s)\, ds,$$

   donde la función de Green para este problema es ($\int_0^1 G \approx (D^2)^{-1}$)

$$G(t,s) = \begin{cases} s\,(t-1), & 0 \le s \le t \le 1, \\ t\,(s-1), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

3. Aplique el método del disparo para resolver el problema

$$x'' = -9\,x, \qquad x(0) = 1, \quad x(\pi/6) = 5.$$

   ¿Cómo cambia el resultado si $x(\pi/3) = 5$?

4. Para el problema

$$x'' = -2\,t\,(x')^2, \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = \beta = 1 + \pi/4,$$

el método del disparo, se basa en resolver la ecuación

$$x_z'' = -2\,t\,(x_z')^2, \qquad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

de modo que $\phi(z) \equiv x_z(1) - \beta = 0$. Determine la función $\phi(z)$ e indique cómo la resolvería mediante el método de Newton.

5. Resuelva el siguiente problema de valores en el contorno

$$x'' + 2\,x' + 10\,t = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(1) = 2,$$

para $x(1/2)$ mediante diferencias finitas con tamaño de malla $h = 1/4$.

6. Determine la solución numérica aproximada del problema

$$-u'' = x, \quad x \in (0, 1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante el método de elementos finitos en el espacio $V_h^{(1)}$ de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla $h = 1/4$. Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

7. Resuelva el problema

$$-((1 + x)\,u'(x))' = 1 + (1 + 3\,x - x^2)\,exp(-x), \qquad 0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$, mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^{q} \xi_j \, \sin(j\,\pi\,x).$$

para $q = 3$. Para calcular las integrales que le surjan utilice la regla del trapecio.

8. Aplique el método de Elementos Finitos cG(1), que usa polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) + u(1) = 0, \quad u'(1) = 2,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$. Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución.