Segunda relación de problemas — Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro — 16 de Octubre de 1998

Realizar los siguientes ejercicios relativos al Tema 2 de la asignatura. Se permite el uso de la calculadora.

1. Suponga que $f(x) \in \mathrm{C}^{\infty}$. Use el desarrollo en serie de Taylor y evalúe $f(x+h)$ y $f(x-h)$. A partir de estos desarrollos, calcule $f'(x)$ y $f''(x)$ y establezca una cota de los errores que comete. Nota: $f'(x)$ y $f''(x)$ tienen que expresarse sólo en función de $f(x)$, $f(x+h)$ y $f(x-h)$.

2. Dados los resultados del problema 1, evalúe $f'(1)$ y $f''(1)$ para las siguientes funciones

   a) $f_1(x) = \sin(x)$,

   b) $f_2(x) = 10000 \sin(x)$,

   c) $f_3(x) = \tan(x)$.

   ¿Cómo afecta el valor de h a sus resultados? Nota: utilice calculadora y presente los resultados con cuatro dígitos de precisión.

3. Escriba un programa en Matlab para el cálculo del épsilon de su máquina. ¿Coincide con `eps`? Nota: Se denomina épsilon de la máquina ε al al error absoluto que representa el último dígito representable en la mantisa, es decir, se define como

$$\varepsilon = min\{\epsilon : fl(1+\epsilon) \neq 1\}.$$

4. Estime mediante propagación de errores hacia atrás el error relativo cometido en la operación de suma de números flotantes. Aproximelo utilizando el épsilon de la máquina.

5. Estime mediante propagación de errores hacia atrás el error relativo cometido en la operación de multiplicación de números flotantes en función de los errores absolutos de los datos iniciales.

6. La operación de suma de números flotantes no cumple con las propiedades asociativa y conmutativa, es decir, el orden de los factores altera el resultado y, por tanto, el error de éste. Demostrar que si se suman los números empezando por el menor y en orden creciente se minimiza la pérdida de dígitos significativos en el resultado.

7. Escriba un algoritmo (y una función en Matlab) para el cálculo de las dos raíces de una ecuación de segundo grado que evite las diferencias cancelativas cuando $b^2 \gg 4\,a\,c$.

8. Determine el número de condicionamiento para la evaluación de la función e^x para $x < 0$. Para los valores de x para los que este problema está mal condicionado, cómo evaluaría la exponencial (utilice desarrollo en serie de Taylor).

9. Calcula la suma y la resta de los números $a = 0{,}4523 \cdot 10^4$ y $b = 0{,}2115 \cdot 10^{-3}$, con una aritmética flotante con mantisa de cuatro dígitos decimales.

10. Realizar un análisis de propagación de errores hacia atrás para la suma de n pares de productos dada por

$$s = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \cdots + a_n\,b_n.$$

Suponga que los datos son números flotantes y por tanto sin error de redondeo. Además suponga, para simplificar, que el error relativo de las operaciones de suma y producto es el mismo.

11. Cómo se debe evaluar la función

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - \alpha}$$

para $\alpha < x$, de forma tal que se eviten diferencias cancelativas.

12. Con una mantisa de cuatro dígitos decimales, sume la siguiente expresión

$$0{,}1025 \cdot 10^4 + (-0{,}9123) \cdot 10^3 + (-0{,}9663) \cdot 10^2 + (-0{,}9315) \cdot 10^1$$

tanto ordenando los números de mayor a menor como de menor a mayor (en valor absoluto). Justifique los resultados que encuentre.

13. Evalúe (con 5 dígitos tras la coma decimal) la función e^x cuando $x = 5$ y $x = -5$ utilizando

   a) Desarrollos en serie de Taylor.

b) Si la convergencia del desarrollo en serie de Taylor es muy lenta, proponga un método (o métodos) más precisos para dicha evaluación.

14. Dada
$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+x)}.$$
Demuestre que $\phi(1) = 1$.

15. Calcule
$$f(x) = \frac{x - \sin x}{\tan x}$$
para $x = 0{,}000001$, con una exactitud de cuatro cifras decimales.

16. ¿Cuál es el número de condicionamiento de $f(x) = e^x$ para $x < 0$? Compare este número de condicionamiento con los que resultan de la evaluación de $f(x) = e^x$ por medio de desarrollos de Taylor.

17. Dadas $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Para qué valores de ξ se satisfacen las siguientes condiciones?

    a) $\int_0^1 f(x)\,dx = f(\xi)$,

    b) $\int_0^1 g(x)\,dx = g(\xi)$,

    c) $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\,\int_0^1 g(x)\,dx$.

18. Resuelva el sistema de dos ecuaciones lineales
$$0{,}780\,x + 0{,}563\,y = 0{,}217,$$
$$0{,}457\,x + 0{,}330\,y = 0{,}127,$$
con cuatro y con tres cifras significativas, y compare los resultados con los de la solución exacta. Justifique los resultados obtenidos. Nota: si utiliza una calculadora, redondee los resultados intermedios.

19. Dada la ecuación diferencial ordinaria
$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \qquad y(0) = a, \quad \frac{dy}{dx}(0) = b.$$
¿Para qué valores iniciales es el problema estable o está físicamente bien condicionado?