Tercera relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 26 de Octubre de 1998

Realizar los siguientes ejercicios relativos al Tema 3 de la asignatura. No es necesario el uso de la calculadora.

1. Demuestre que si $A$ y $B$ son matrices reales cuadradas, con $|A| \neq 0$, si
$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$
entonces existe $B^{-1}$. Además acote la diferencia
$$\|A^{-1} - B^{-1}\|.$$

2. Se define la traza de la matriz cuadrada $A$ como la suma de los elementos de su diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios. Ayuda: el teorema de Schur le puede ser útil.

3. Dada una matriz cuadrada $A$ demuestre que
$$|\mathrm{tr}(A)| \leq n\, \rho(A).$$
Si, además, $A$ es hermitiana (o simétrica) y definida positiva
$$\mathrm{tr}(A) \geq \rho(A).$$

4. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que
   *a*) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\, \|x\|_\infty$,
   *b*) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$,
   *c*) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\, \|x\|_2$.

   Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

5. Dado el polinomio
$$p(x) = b_0 + b_1\, x + \cdots + b_m\, x^m,$$

y la matriz cuadrada $A$, defina

$$p(A) = b_0\, I + b_1\, A + \cdots + b_m\, A^m.$$

Suponga que la forma canónica de Jordan de $A$ es diagonal, es decir,

$$P^{-1}\, A\, P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dado el polinomio característico de $A$, $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, demuestre que $p(A) = 0$.

6. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz $A$ satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$.

7. Dada una matriz $A$ cuadrada cuyos autovalores son $\lambda_i$ y sus autovectores $u_i$, determine los autovalores y los autovectores de

   *a*) $A^m, \qquad m \geq 2$,

   *b*) $A^{-1}$, suponiendo que $|A| \neq 0$,

   *c*) $A + c\, I$, donde $c$ es una constante.

8. Para cualquier matriz $A$, si $U$ es unitaria y del mismo orden que $A$, demuestre que
$$\|A\, U\|_2 = \|U\, A\|_2 = \|A\|_2.$$

9. Sea $U$ una matriz unitaria. Demuestre que

   *a*) $\|U\, x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n$,

   *b*) la distancia entre $x$ e $y$ es la misma que la distancia entre $U\, x$ y $U\, y$,

   *c*) $\langle U\, x, U\, y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$,

   *d*) los autovalores de $U$ tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

10. Dada la matriz $A$ hermitiana que es definida positiva, es decir, $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle A\, x, x\rangle > 0$. Demuestre que $A$ es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

11. Defina

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Demuestre que los autovalores de $e^A$ son $e^{\lambda_i}$ donde $\lambda_i$ son los autovalores de $A$. Además demuestre que si $B$ es semejante a $A$, $P^{-1}\, B\, P = A$, entonces $e^A = P^{-1}\, e^B\, P$.

12. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Calcule los autovalores y autovectores/autofunciones de esta ecuación. ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Discreticemos el espacio $x$ de tal manera que haya $(N+1)$ puntos espaciados en $1/N$; es decir, llamando $\Delta x = 1/N$,

$$x_i = \frac{i-1}{N} = (i-1)\,\Delta x, \qquad i = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Aproximemos la segunda derivada por la fórmula en diferencias

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2\, y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O\Big(\Delta^4\Big),$$

donde $x_i = i\,\Delta x$ y $y_i \approx y(x_i)$ y de tal manera que la ecuación de partida evaluada en el punto $x_i$ venga dada por

$$\frac{y_{i+1} - 2\, y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda\, y_i = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$y_{i+1} + (w-2)\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, N,$$

donde $w = \lambda\, \Delta x^2$, y $y_1 = y_{N+1} = 0$. Definiendo $\Lambda = w - 2$, tenemos

$$y_{i+1} + \Lambda\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad y_1 = y_{N+1} = 0.$$

¿Cuáles son los autovalores $\Lambda$ de esta sistema de ecuaciones? ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Para los casos $N = 2$ y $N = 3$ calcule los autovalores $\Lambda$ y relaciónelos con los $\lambda$ de la ecuación diferencial ordinaria. ¿Cuál es esa relación? ¿Por qué? ¿Qué es lo que se ha perdido/ganado en la discretización?