Cuarta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro — 9 de Noviembre de 1998

Realizar los siguientes ejercicios relativos al Tema 4 de la asignatura.

1. Demuestra que la inversa de una matriz triangular superior (inferior) es una matriz triangular superior (inferior).

2. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante (estrictamente) por filas si
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$
Demuestre que A es invertible, es decir, existe su inversa A^{-1}.

3. Determina el número total de operaciones de división, producto y suma requeridas por el procedimiento de resolución de un sistema lineal mediante factorización LU de Crout. Calcula también el número total de operaciones, su orden de magnitud y compara con el del procedimiento de Gauss-Jordan.

4. Dado el sistema lineal
$$1{,}01\, x + 0{,}99\, y = 2, \qquad 0{,}99\, x + 1{,}01\, y = 2.$$
Calcule
   a) La solución exacta del problema
   b) La solución usando solamente dos cifras decimales y redondeo
   c) La inversa de la matriz de coeficientes A^{-1} con dos cifras decimales y redondeo
   d) El número de condición de A para el apartado (d).
   e) El residuo obtenido en (b).

5. Demuestre que si $|A| \neq 0$, $|B| = 0$ entonces
$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A - B\|}.$$

6. Demuestre que

a) si $\|I - B\| < 1$, entonces $|B| \neq 0$,

b) si $\|C\| < 1$, entonces $|I - C| \neq 0$,

c) si $|A| \neq 0$ y $|B|$ es tal que

$$\|A^{-1}\| < \frac{1}{\|A - B\|},$$

entonces $|B| \neq 0$.

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con aritmética de cuatro dígitos (mantisa de 4 dígitos decimales),

$$\begin{aligned} 0{,}1410 \times 10^{-2}\, x + 0{,}4004 \times 10^{-1}\, y &= 0{,}1142 \times 10^{-1}, \\ 0{,}2000 \times 10^{0}\, x + 0{,}4912 \times 10^{1}\, y &= 0{,}1428 \times 10^{1}, \end{aligned}$$

por medio de los siguientes métodos:

a) regla de Cramer,

b) eliminación de Gauss y en el orden en que se dan las ecuaciones,

c) eliminación de Gauss e intercambiando el orden de las ecuaciones,

d) eliminación de Gauss con pivotaje completo.

Explique sus resultados y calcule el número de condición de la matriz de coeficientes. ¿Es esta matriz simétrica?, ¿y definida positiva? ¿Cuáles son su determinante, sus autovalores y sus autovectores?

8. Calcule el rango, los autovalores y los autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es la solución de $A\,x = 0$? ¿Por qué?

9. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 2\,x + y + 2\,z &= 3 \end{aligned}$$

con el método de eliminación de Gauss y calcule las matrices de permutación que le sean necesarias. Explique lo que hace y por qué lo hace.

10. Resuelva

$$0{,}780\,x + 0{,}563\,y = 0{,}217$$
$$0{,}913\,x + 0{,}659\,y = 0{,}254$$

con tres cifras decimales. En un ordenador (1) se ha obtenido el resultado

$$x_{c1} = \begin{pmatrix} 0{,}341 \\ -0{,}087 \end{pmatrix},$$

mientras que un segundo ordenador (2) se ha obtenido

$$x_{c1} = \begin{pmatrix} 0{,}999 \\ -1{,}001 \end{pmatrix}.$$

Calcule el residuo $r = b - A\,x$ para las soluciones x_{c1} y x_{c2}. ¿Cuál es el ordenador que le da mejor resultados? ¿Por qué? ¿Sugiere usted el uso del residuo como una indicación de la exactitud de la solución calculada? ¿Por qué? ¿Cuál es el número de condición de la matriz de coeficientes? ¿Es un problema bien condicionado?

11. Calcule la solución exacta de $A\,x = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6384 & 0{,}8065 \\ 0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0{,}8319 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix}.$$

Calcule el vector x_c tal que $r = A\,x_c - b$ es exactamente igual a

$$b = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{8} \end{pmatrix}.$$

Calcule el número de condición de A usando norma infinito. Si el ordenador representa b exactamente (sin error), calcule el error relativo de A tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Si el ordenador no comete error al representar A, calcule el error relativo de b tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Repita los resultados anteriores en norma 1.

12. Si $r = A\,x_c - b$, $x_c = x_e + \Delta\,x$, $A\,x_e = b$, y $R = A\,C - I$ donde C es una aproximación a la inversa de A, demuetre que

$$\frac{\|C\|\,\|r\|}{\|R\| - 1} \le \|\Delta\,x\| \le \frac{\|C\|\,\|r\|}{1 + \|R\|}.$$

13. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule su factorización LU por medio de los métodos de Doolittle y Crout. Calcule también su descomposición de Cholesky.

14. Resuelva el sistema

$$3{,}9\,x_1 + 1{,}6\,x_2 = 5{,}5, \qquad 6{,}8\,x_1 + 2{,}9\,x_2 = 9{,}7,$$

con aritmética de dos cifras y el método de Crout. Si es posible mejore el resultado utilizando el residuo.