Sexta relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 9 de Diciembre de 1998

Ejercicios del tema de cálculo de raíces y ceros de funciones.

1. Para calcular la raíz cuadrada de a, algunas veces se utiliza la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

   donde x_1 es un número positivo.

   a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe, ¿cuál es su valor?

   b) Si $a \leq x_n \leq 1$, ¿cuáles son A y B tales que $A \leq x_{n+1} \leq B$?

   c) ¿Para qué valores de a, la iteración converge o $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe?

2. Para calcular la raíz $\xi = 2$ de $x^2 - x - 2 = 0$, se propone la iteración $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, ¿converge dicha iteración?

3. Establezca la convergencia de la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ con

$$g(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

4. Dada $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$. Demuestre que hay una raíz en $[0, 1]$. ¿Para qué valores de $x_0 \in [0, 1]$ converge la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\, e^{x_n/2}?$$

5. La ecuación $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$ también tiene una raíz en $x \in [4, 5]$ ¿Puede calcularla con la misma iteración del problema anterior? Determine una iteración que converja para dicha raíz (si existe ésta).

6. Para las ecuaciones

   a) $x^3 - x - 1 = 0$,

   b) $x - \tan x = 0$,

   c) $e^{-x} - \cos x = 0$,

   determine una iteración funcional y un intervalo $x \in [a, b]$ para que dicha iteración converge a la raíz positiva más pequeña.

7. *a*) Considere el método de Newton-Raphson para calcular las raíces de $f(x) = 0$. Suponga que para el punto fijo α, se cumple que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. ¿Cuáles son los valores de $g'(\alpha)$ y $g''(\alpha)$ si lo denotamos $x_{n+1} = g(x_n)$?

   b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, ¿converge el método de Newton cuadráticamente?

   c) ¿Qué orden de convergencia tiene la iteración

   $$x_{n+1} = x_n - 2\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n),$$

   del método de Newton para $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$?

   d) Establezca las condiciones bajo las cuales el método de Newton converge cúbicamente.

   e) Si $x = \alpha$ es un cero de multiplicidad m de $f(x) = 0$, deduzca la convergencia de la iteración

   $$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   y las condiciones de dicha convergencia.

8. Considere la iteración no estacionaria

   $$x_{n+1} = x_n - c\,f(x_n),$$

   donde $c = c[x_n, f(x_n), f'(x_n)]$. ¿Cuál es la condición de convergencia de este método?

9. Suponga que se quieren calcular las raíces de $f(x) = 0$ mediante el siguiente método de Newton-Raphson modificado: Dada x_n calcule

   $$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   que equivale a un método de Newton estándar en el que la derivada se re-calcula sólo cada dos pasos. Demuestre que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(y_n - \alpha)\,(x_n - \alpha)} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2.$$

10. Calcule el punto fijo y la tasa de orden de convergencia de la iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n \geq 0,$$

suponiendo que x_0 está cerca del punto fijo, donde

$$g(x) = \frac{x\,(x^2+3\,a)}{3\,x^2+a}, \qquad a \geq 0.$$

11. Calcule el cero de $f(x) = x - 0{,}2\sin x - 0{,}5$, en el intervalo $[0{,}5, 1]$ con una exactitud de 6 cifras decimales en la mantisa por medio de los métodos

   a) bisección,

   b) regula falsi,

   c) Newton,

   d) secante,

   y determine los residuos para todos estos métodos

12. Para la iteración $x_{i+1} = \sqrt{2+x_i}$ determine sus puntos fijos e intervalo de convergencia. Aplique 6 pasos de iteración funcional. Aplique la regla de la δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de dicha iteración.

13. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1,$$

determine:

   a) su número de raíces positivas,

   b) su número de raíces negativas,

   c) intervalos donde se encuentren cada una de sus raíces reales.

14. Calcule los ceros de $x^7 - 1 = 0$. Explique la elección de su método.