Sexta relación de problemas Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro 9 de Diciembre de 1998

SOLUCIONES

Soluciones de los ejercicios de la sexta relación de problemas.

1. Para calcular la raíz cuadrada de a, algunas veces se utiliza la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

donde x_1 es un número positivo.

a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe, ¿cuál es su valor?

b) Si $a \le x_n \le 1$, ¿cuáles son A y B tales que $A \le x_{n+1} \le B$?

c) ¿Para qué valores de a, la iteración converge o $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe?

Solución.

a) Cuando la iteración converge $x_n = x_{n+1} = x$, donde

$$x = f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \qquad \frac{x}{2} = \frac{a}{2\,x},$$

$$x^2 = a, \qquad x = \sqrt{a}.$$

Hemos supuesto, como haremos en todo el ejercicio que $a \ge 0$.

b) Vamos a analizar el comportamiento de la función $f(x_n)$ con $a \le x_n \le 1$. Los valores en los extremos son

$$f(a) = f(1) = \frac{a+1}{2} = B.$$

La funciones x y a/x son monótonas crecientes y decrecientes, respectivamente, en el intervalo $[0, \infty]$, luego esperamos encontrar un mínimo en un punto intermedio de $[a, 1]$, donde

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = 0, \qquad x = \pm\sqrt{a},$$

es decir, el punto mínimo

$$x_{\text{mín}} = \sqrt{a}, \qquad f(x_{\text{mín}}) = \sqrt{a} = A.$$

Sabemos que dicho punto es mínimo, pero para asegurarnos, podemos calcular la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{a}{x^3} > 0, \quad \text{si } x \in [a, 1].$$

Luego hemos demostrado que

$$a \leq x_n \leq 1, \qquad \sqrt{a} \leq f(x_n) = x_{n+1} \leq \frac{a+1}{2}.$$

c) Para que converja es necesario que

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leq 1,$$

es decir,

$$-1 < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) < 1,$$

que se pueden escribir como

$$3\,x^2 > a, \qquad a > x^2,$$

es decir, la condición $a > 0 \equiv I$. También hemos de encontrar un intervalo $I(a) \in I$ que garantice que la función sea contractiva

$$x \in I(a) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(a).$$

En el apartado anterior hemos probado que $I(a) \supset (0, 1]$, ahora tenemos que estudiar el comportamiento de la función $f(x_n)$ con $a \geq x_n \geq 1$. Los valores en los extremos son

$$f(a) = f(1) = \frac{a+1}{2} = B.$$

La funciones x y a/x son monótonas crecientes y decrecientes, respectivamente, en el intervalo $[0, \infty]$, luego esperamos encontrar un mínimo en un punto intermedio de $[1, a]$, donde

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = 0, \qquad x = \pm\sqrt{a},$$

es decir, el punto mínimo

$$x_{\text{mín}} = \sqrt{a}, \qquad f(x_{\text{mín}}) = \sqrt{a} = A.$$

Sabemos que dicho punto es mínimo, pero para asegurarnos, podemos calcular la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{a}{x^3} > 0, \quad \text{si } x \in [1, a].$$

Luego hemos demostrado que

$$a \geq x_n \geq 1, \qquad \sqrt{a} \leq f(x_n) = x_{n+1} \leq \frac{a+1}{2}.$$

Note que para $a \geq 1$, $\sqrt{a} \leq (a+1)/2 \leq a$, luego para todo $a > 0$ la función es contractiva y queda asegurada la convergencia.

2. Para calcular la raíz $\xi = 2$ de $x^2 - x - 2 = 0$, se propone la iteración $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, ¿converge dicha iteración?

   Solución. Hemos definido la iteración

   $$x_{n+1} = g(x_n), \qquad g(x) = x^2 - 2, \qquad g'(x) = 2\,x$$

   que converge si $|g'(x)| < 1$, es decir, $|x| < 1/2$, que es un intervalo al que no pertenece la raíz $\xi = 2$ ($|g'(\xi)| = 4$). Esto significa que, dado el punto x_0, la secuencia $\{x_n\}$ converge a ξ sólo si para algún n_0, se satisface $x_n = 2$, $\forall n \geq n_0$.

3. Establezca la convergencia de la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ con

   $$g(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

   Solución. Primero debemos determinar si existe el punto fijo de esta iteración

   $$\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1,$$

   luego el punto fijo de esta iteración no existe. Por lo tanto la secuencia no puede converger a ningún punto. Sin embargo, es bueno notar que esta función $g(x)$ es contractiva para

   $$x_0 \in I = (-\infty, \infty), \qquad g(x_0) \in [1, \infty),$$

ya que $[1, \infty) \subset I = (-\infty, \infty)$. Además,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad |g'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1,$$

sin embargo, la secuencia diverge ya que para cualquier x_0,

$$x_1 = \sqrt{1+x_0^2} > x_0, \qquad x_2 = \sqrt{1+x_1^2} > x_1 > x_0, \qquad \ldots$$

4. Dada $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$. Demuestre que hay una raíz en $[0,1]$. ¿Para qué valores de $x_0 \in [0,1]$ converge la iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\,e^{x_n/2}?$$

Solución. Para demostrar que existe al menos una raíz en $[0,1]$ basta aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)$ que es continua,

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 4 < 0.$$

El punto fijo para la iteración es

$$\alpha = \frac{1}{2}\,e^{\alpha/2}, \qquad (2\,\alpha)^2 = e^{\alpha}$$

es raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Ahora tenemos que comprobar si g es contractiva. Como la función $g(x)$ es creciente para $x \in [0,1]$,

$$g'(x) = \frac{1}{4}\,e^{x/2} > 0,$$

y además

$$g(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5, \qquad g(1) = \frac{1}{2}\,e^{1/2} \approx \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8,$$

(ya que $17^2 = 289$, y $16^2 = 256$), la función es contractiva

$$g([0,1]) \approx [0{,}5, 0{,}8] \subset [0,1].$$

Además como $|g'([0,1])| < 1$, para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$, la iteración converge a un punto fijo, es decir, a una raíz de $f(x)$ en dicho intervalo (de hecho, se puede demostrar que esta raíz es única).

5. La ecuación $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$ también tiene una raíz en $x \in [4,5]$ ¿Puede calcularla con la misma iteración del problema anterior? Determine una iteración que converja para dicha raíz (si existe ésta).

Solución. Aplicando de nuevo Bolzano,

$$f(4) = e^4 - 4\,4^2 = e^4 - 8^2 < 0, \qquad e < \sqrt{8} \approx 2{,}8,$$

$$f(5) = e^5 - 4\,5^2 \approx (2{,}7)^4 \times 2{,}7 - 100 \approx 53 \times 2{,}7 - 100 \approx 143 - 100 > 0,$$

comprobamos que existe la raíz. En el intervalo $[4,5]$ la función $g(x)$ es creciente y como

$$g(4) = \frac{1}{2}\,e^2 \approx \frac{(2{,}7)^2}{2} \approx 3{,}6,$$

$$g(5) = \frac{1}{2}\,e^{2{,}5} \approx 3{,}6\,\sqrt{e} \approx 3{,}6 \times 1{,}6 \approx 5{,}7,$$

tenemos que $g([4,5]) \supset [4,5]$. En general, para cualquier subintervalo de $[4,5]$ también se cumplirá la misma relación de inclusión, ya que la función g crece demasiado rápido, como podemos comprobar con su derivada $g'(x)$, que también es creciente

$$g'(4) = \frac{1}{4}\,e^2 \approx \frac{3{,}6}{2} \approx 1{,}8,$$

$$g'(5) = \frac{1}{4}\,e^{2{,}5} \approx \frac{5{,}7}{2} \approx 2{,}8,$$

con lo que $g'([4,5]) > 1$. Por tanto, la iteración no converge para ningún punto inicial del intervalo $[4,5]$.

Como posible iteración podemos probar con una iteración de Picard con relajación

$$x = x + \mu\, f(x), \qquad x = g(x) = x + \mu\,(e^x - 4\,x^2),$$

y deberemos elegir μ (si es posible) tal que

$$g([4,5]) \subset [4,5], \qquad |g'([4,5])| < 1.$$

Aunque $g(x;\mu)$ no es monótona $\forall x \in [4,5], \mu \in \mathbb{R}$, podemos probar con

$$5 > g(4) > 4, \qquad 5 > 4 - 9{,}40\,\mu > 4, \qquad -0{,}11 < \mu < 0,$$

$$5 > g(5) > 4, \qquad 5 > 5 + 48{,}41\,\mu > 4, \qquad -0{,}021 < \mu < 0,$$

y para $g'(x)$ que es una función monótona decreciente para $\mu < 0$, basta comprobar que

$$|g'(5)| < 1, \qquad -1 < 1 + 108{,}41\,\mu < 1, \qquad -0{,}0092 < \mu < 0,$$

con lo que para $-0{,}0092 < \mu < 0$, $1 > |g'(x)|$; de hecho, $1 > g'(x) > 0$ y, por tanto, la función $g(x)$ cumple rigurosamente con las condiciones necesarias para convergencia, y para todo $x_0 \in [4,5]$ la iteración converge si $-0{,}0092 < \mu < 0$.

6. Para las ecuaciones

   a) $x^3 - x - 1 = 0$,

   b) $x - \tan x = 0$,

   c) $e^{-x} - \cos x = 0$,

   determine una iteración funcional y un intervalo $x \in [a,b]$ para que dicha iteración converge a la raíz positiva más pequeña.

   Solución.

   a) Antes de buscar una iteración funcional para calcular la raíz debemos analizar la función $f(x) = x^3 - x - 1$, con objeto de situar sus raíces. Su gráfica es fácil de obtener (se deja al alumno) y sus derivadas

   $$f'(x) = 3\,x^2 - 1 = 0, \qquad f''(x) = 6\,x,$$

   indican que es un función creciente en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, alcanza un máximo en $-1/\sqrt{3}$, decrece hasta alcanzar un mínimo en $1/\sqrt{3}$ y sigue creciendo. Tanto el mínimo como el máximo tienen ordenadas negativas, luego el polinomio cúbico $f(x)$ tiene dos raíces complejas conjugadas y una raíz en $(1/\sqrt{3}, \infty)$. Tanteando con $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, Bolzano nos indica que la raíz se encuentra en $(1,2)$.

   Como posible iteración funcional podemos intentar

   $$x = x^3 - 1 = g(x), \qquad g'(x) = 3\,x^2,$$

que, sin embargo, no es buena debido a que $g'(x)$ es creciente en $(1,2)$ y $g'([1,2]) = [3,12]$, que no cumple $|g'(x)| < 1$ para la raíz. Otra posible iteración es

$$x = (1+x)^{1/3} = g(x), \qquad g'(x) = \frac{1}{3\,(1+x)^{2/3}},$$

que, para simplificar los cálculos, vamos a estudiar en el intervalo $[0,\infty) \supset [1,2]$, ya que como $g(x)$ es ahora monótona creciente y $g'(x)$ es monótona decreciente, y además

$$g'([0,\infty)) = [\frac{1}{3}, 0], \qquad g([0,\infty)) = [1,\infty) \subset [0,\infty),$$

con lo que queda garantizada la convergencia de la iteración para cualquier $x_0 \in [1,2] \subset [0,\infty)$.

b) La función $f(x) = x - \tan x$, tiene infinitas raíces en los puntos de corte de la recta $y = x$ y la función periódica $y = \tan x$, que tiene asíntotas verticales en $(2\,k+1)\,\pi/2$, $k \in \mathrm{Z}$, por lo que existirá una raíz ξ_k en cada intervalo

$$\xi_k \in I_k = ((2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}, (2\,k+3)\,\frac{\pi}{2}), \qquad k \in \mathrm{Z},$$

siendo la más sencilla $x = 0$ (intervalo con $k = -1$), para $k > 0$ las raíces en el intervalo I_k estarán cerca de su extremo derecho, es decir, cerca de $(2\,k+3)\,\frac{\pi}{2}$, y para $k < 0$, al contrario, estarán cerca de su extremo izquierdo, es decir, $(2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}$.

Podemos intentar la iteración

$$x_{n+1} = \tan x_n = g(x_n), \qquad g'(x) = \sec^2 x,$$

pero que tiene el inconveniente de que $g'(0) = 1$ y de que, debido a que las raíces están próximas a las asintóticas verticales de la tangente, $g'(x)$ cerca de las raíces será mayor que la unidad (lo que se puede comprobar rigurosamente, pero que omitiremos).

Si probamos con una iteración de Picard con relajación

$$x = x + \mu\,(\tan x - x) = g(x), \qquad g'(x) = 1 + \mu\,\tan^2 x,$$

para un intervalo suficientemente pequeño alrededor de la raíz ξ_k podremos tener contractividad y haciendo μ negativo y suficientemente pequeño. Por ejemplo, para la raíz ξ_1 que se encuentra cerca de $3\,\pi/2 \approx 4{,}7$, podemos tantear

$$f(4) \approx 2{,}84, \quad f(4{,}7) \approx -76{,}0, \quad f(4{,}4) \approx 1{,}30, \quad f(4{,}5) \approx -0{,}14,$$

por lo que $\xi_1 \in [4{,}4, 4{,}5]$. Para μ negativo cercano a cero y pequeño, la función $g'(x) > 0$ (y decreciente ya que para esos valores $g''(x) = 2\,\mu\,\sec^2 x\,\tan x < 0$) y $g(x)$ es creciente, luego haciendo

$$4{,}4 < g(4{,}5) < 4{,}5, \qquad 4{,}4 < 4{,}5{+}0{,}14\,\mu < 4{,}5, \qquad -0{,}73 < \mu < 0,$$

$$|g'(4{,}5)| < 1, \qquad -1 < 1 + \mu\,\tan^2 4{,}5 < 1, \qquad -0{,}093\mu < 0,$$

con lo que para $-0{,}093\mu < 0$ la iteración converge para la raíz ξ_1 que está en el intervalo $[4{,}4, 4{,}5]$. De igual forma se procedería para obtener un μ suficientemente pequeño para cualquier raíz ξ_k.

c) Tenemos que acotar las raíces de la función $f(x) = e^{-x} - \cos x$. Claramente, $x = 0$ es una raíz, como para $x < 0$, $e^{-x} = e^{|x|} > 1 > |\cos x|$, no existe ninguna raíz negativa. Como para $x > 0$, $e^{-x} \approx 0$, las infinitas (numerable) raíces positivas de $f(x)$, sean ξ_k, se encuentran cercanas a las raíces del coseno, es decir, $c_k = (2\,k{+}1)\,\pi/2$, con $k \in \mathbb{N}$. Además conforme k crece, ξ_k se encuentra más cerca de la raíz c_k del coseno y además para k impar, la raíz $\xi_k < c_k$ y para k par, $\xi_k > c_k$.

Podemos utilizar una iteración de Picard con relajación

$$x = x + \mu\,(e^{-x} - \cos x) = g(x), \qquad g'(x) = 1 + \mu\,(\sin x - e^{-x}),$$

para calcular la primera raíz positiva que sabemos se encuentra en el intervalo $I = (0, \pi/2)$. En este intervalo,

$$g''(x) = \mu\,(e^{-x} + \cos x) > 0, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

luego $g'(x)$ es una función creciente si $\mu > 0$ y decreciente si $\mu < 0$, y al imponer la condición

$$|g'(x)| < 1, \qquad |g'(\pi/2)| < 1, \quad |g'(0)| < 1,$$

$$-1 < 1 + 0{,}79\,\mu < 1, \qquad 0 > \mu > -2{,}53,$$

$$-1 < 1 + \mu < 1, \qquad 0 < \mu < 2,$$

que son condiciones incompatibles; debemos elegir un intervalo más pequeño, probemos con $[\pi/4, \pi/2]$, y entonces

$$|g'(x)| < 1, \qquad |g'(\pi/2)| < 1, \quad |g'(\pi/4)| < 1,$$

$$-1 < 1 + 0{,}25\,\mu < 1, \qquad -8 < \mu < 0,$$

por tanto $-2{,}53 < \mu < 0$ satisface esta hipótesis y como

$$g([\pi/4, \pi/2]) \approx [\pi/4 - 0{,}25\,\mu, \pi/2 + 0{,}21\,\mu] \subset [\pi/4, \pi/2],$$

requiere que $-\pi \leq \mu \leq 0$, es decir, queda automáticamente garantizada la convergencia de esta iteración a la primera raíz positiva de la función f con cualquier valor inicial en $[\pi/4, \pi/2]$.

7. *a*) Considere el método de Newton-Raphson para calcular las raíces de $f(x) = 0$. Suponga que para el punto fijo α, se cumple que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. ¿Cuáles son los valores de $g'(\alpha)$ y $g''(\alpha)$ si lo denotamos $x_{n+1} = g(x_n)$?

   b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, ¿converge el método de Newton cuadráticamente?

   c) ¿Qué orden de convergencia tiene la iteración

   $$x_{n+1} = x_n - 2\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n),$$

   del método de Newton para $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$?

   d) Establezca las condiciones bajo las cuales el método de Newton converge cúbicamente.

   e) Si $x = \alpha$ es un cero de multiplicidad m de $f(x) = 0$, deduzca la convergencia de la iteración

   $$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   y las condiciones de dicha convergencia.

<u>Solución</u>.

a) El método de Newton-Raphson para $f(x) = 0$ es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n),$$

por lo que

$$g = x - \frac{f}{f'}, \qquad g(\alpha) = \alpha,$$

$$g' = 1 - \frac{f'^2 - f\,f''}{f'^2} = \frac{f\,f''}{f'^2}, \qquad g'(\alpha) = 0,$$

$$g'' = \frac{(f'\,f'' + f\,f''')\,f'^2 - 2\,f'\,f''^2\,f}{f'^4}, \qquad g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, para calcular el valor de $g'(\alpha)$ necesitamos aplicar la regla de L'Hôpital,

$$g'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)\,f''(x)}{2\,f'(x)\,f''(x)} = \frac{1}{2},$$

ahora bien, la ecuación para el error nos da

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n) \\ &= \alpha - (g(\alpha) + g'(\alpha)\,(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}\,(x_n - \alpha)^2 + \cdots \\ &= g'(\alpha)\,e_n - \frac{g''(\alpha)}{2}\,e_n^2 + \cdots, \end{aligned}$$

con lo que por ser $g'(\alpha) \neq 0$, el método de Newton, en este caso, no converge cuadráticamente si no sólo linealmente.

c) Para calcular el orden de la iteración funcional con

$$g(x) = x - 2\,\frac{f(x)}{f'(x)},$$

cuando $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, debemos utilizar la ecuación del error

$$e_{n+1} = g'(\alpha)\,e_n - \frac{g''(\alpha)}{2}\,e_n^2 + \cdots,$$

que requerirá del cálculo de $g'(\alpha)$,

$$g'(x) = 1 - 2\,\frac{f'^2(x) - f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)} = -1 + 2\,\frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)},$$

que en el punto fijo, requiere de la regla de L'Hôpital,

$$g'(\alpha) = -1 + 2\,\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)} = -1 + 2\,\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)\,f''(x)}{2\,f'(x)\,f''(x)} = 0,$$

y que al ser cero, nos obliga a calcular $g''(\alpha)$,

$$g'' = 2\,\frac{(f'\,f'' + f\,f''')\,f'^2 - 2\,f'\,f''^2\,f}{f'^4},$$

$$g''(\alpha) = 2\,\lim_{x\to\alpha} g''(x) = 2\,\lim_{x\to\alpha}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = \infty,$$

con lo que obtenemos convergencia cuadrática, aunque con un constante tal que esta convergencia será infinitamente lenta, y en la práctica será sólo superlineal.

d) El error en el método de Newton toma la forma

$$e_{n+1} = g'(\alpha)\,e_n - \frac{g''(\alpha)}{2}\,e_n^2 + \frac{g'''(\alpha)}{3!} - \frac{g^{(4)}(\alpha)}{4!}\,e_n^4 + \cdots,$$

por lo que la condición para convergencia cúbica es

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0, \qquad g'''(\alpha) \neq 0.$$

e) Si α es una raíz de multiplicidad m, entonces $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \neq f^{(m)}(\alpha)$. De los apartados anteriores, sabemos que si $m = 1$,

$$g(\alpha) = \alpha, \qquad g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) \neq 0,$$

con lo que tenemos orden cuadrático, y que si $m = 2$,

$$g(\alpha) = \alpha, \qquad g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) \neq 0,$$

con lo que también tenemos orden de convergencia cuadrática.

Nos queda estudiar el caso $m > 2$. Podemos evaluar $g^{(k)}$ sustituyendo las derivadas de f mediante el siguiente desarrollo en serie Taylor (válido ya que α es raíz de multiplicidad m),

$$f(x) \approx A\,(x-\alpha)^m, \qquad f'(x) \approx A\,m\,(x-\alpha)^{m-1},$$

y aplicando luego el límite $x \to \alpha$. Por ejemplo,

$$g(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)} = x - m\,\frac{A\,(x-\alpha)^m}{A\,m\,(x-\alpha)^{m-1}} = x - m\,\frac{x-\alpha}{m},$$

luego $g(\alpha) = \alpha$. Y para la primera derivada,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - m + m\,\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= 1 - m + m\,\frac{A\,(x-\alpha)^m\,A\,m\,(m-1)\,(x-\alpha)^{m-1}}{A^2\,m^2\,(x-\alpha)^{2(m-1)}} \\ &= 1 - m + m\,\frac{m\,(m-1)}{m^2} = 1 - m + m - 1 = 0, \end{aligned}$$

luego $g'(\alpha) = 0$. Y para la segunda derivada,

$$\begin{aligned} g''(x) &= m\,\frac{f'(x)^2\,f''(x) + f(x)\,f'(x)\,f^{(3)}(x) - 2\,f(x)\,f''(x)^2}{f'(x)^3} \\ &= \frac{m}{x-\alpha}\,\left(m - 1 + \frac{(m-1)\,(m-2)}{m} - 2\,\frac{(m-1)^2}{m}\right) \\ &= \frac{m}{x-\alpha}\,\frac{m-1}{m}\,\left(m + m - 2 - 2\,(m-1)\right), \end{aligned}$$

que al aplicar el límite $x \to \alpha$ nos dará una indeterminación $0/0$. Al resolver esta indeterminación, en general, obtendremos $g''(\alpha) \neq 0$, por lo que este método de Newton modificado converge cuadráticamente. Es decir, la adición del producto por m compensa al método de Newton para que recupere su segundo orden de convergencia, que había perdido debido a la presencia de la raíz múltiple.

De hecho, si la indeterminación se resuelve con $g''(\alpha) = 0$, algo excepcional por otro lado, se puede demostrar (aunque es engorroso y lo omitiremos aquí) que

$$g'''(\alpha), \cdots, g^{(m-1)}(\alpha),$$

tienen una indeterminación del mismo tipo $(0/(x-\alpha))$ y que

$$g^{(m)} = \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{m\,A\,(x-\alpha)^{m-2}},$$

que en el caso excepcional de que todas las indeterminaciones se resolviesen a 0, nos indicaría que el método de Newton modificado como mucho tiene orden m de convergencia.

8. Considere la iteración no estacionaria

$$x_{n+1} = x_n - c\,f(x_n),$$

donde $c = c[x_n, f(x_n), f'(x_n)]$. ¿Cuál es la condición de convergencia de este método?

Solución. Este método iterativo con $g(x) = x - c\,f(x)$ corresponde a lo que podemos llamar un método de Picard con relajación. Las condiciones de convergencia de este método son las propias de todo método de punto fijo, la contractividad de la función $g(x)$, que no podemos verificar para f general pero que supondremos para un entorno suficientemente cercano a la raíz y la condición $|g'(x)| < 1$ en dicho entorno. Estudiemos esta última condición, suponiendo que $c \equiv c(x, f, f')$,

$$\begin{aligned} g' &= 1 - c\,f' - f\,\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial f}\,f' + \frac{\partial c}{\partial f'}\,f''\right) \\ &= 1 - f\,\frac{\partial c}{\partial x} - f'\,\left(c + f\,\frac{\partial c}{\partial f}\right) - f\,f''\,\frac{\partial c}{\partial f'}, \end{aligned}$$

que será nulo sólo excepcionalmente y que convergerá $|g'| < 1$ bajo una expresión bastante complicada en las derivadas de f y c.

Si para simplificar, tomamos $c \equiv c(f, f')$, $\partial c/\partial x = 0$, obtenemos

$$g' = 1 - f'\,\left(c + f\,\frac{\partial c}{\partial f}\right) - f\,f''\,\frac{\partial c}{\partial f'},$$

que sigue llevando a una expresión de gran complejidad.

Si para simplificar más aún tomamos $c \equiv c(f')$, $\partial c/\partial x = \partial c/\partial f = 0$,

$$g' = 1 - c\,f' - f\,f''\,\frac{dc}{df'},$$

que si $1 - c\, f' = 0$, es decir,

$$c = \frac{1}{f'}, \qquad \frac{dc}{df'} = -\frac{1}{f'^2},$$

entonces

$$g' = \frac{f\, f''}{f'^2},$$

que coincide con el método de Newton, que es de segundo orden de convergencia.

En general, el método obtenido sólo alcanzará convergencia de primer orden (convergencia lineal) y las condiciones para que el método realmente converja son difíciles de determinar para c y f sin particularizar.

9. Suponga que se quieren calcular las raíces de $f(x) = 0$ mediante el siguiente método de Newton-Raphson modificado: Dada x_n calcule

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

que equivale a un método de Newton estándar en el que la derivada se re-calcula sólo cada dos pasos. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(y_n - \alpha)\,(x_n - \alpha)} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2.$$

Solución. La ecuación del error para el método

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h(x_n), \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n, y_n),$$

toma la forma

$$e_{n+1} = \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n, y_n),$$

y como

$$g(x_n, y_n) = g(x_n, x_n) + \frac{\partial g}{\partial y}\,(y_n - x_n) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots,$$

donde

$$g(x_n, x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h(x_n),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_n, x_n) = 1 - \frac{f'(y)}{f'(x_n)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_n, x_n) = -\frac{f''(y)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)},$$

por lo que

$$g(x_n, y_n) = h(x_n) - \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots,$$

con lo que la ecuación para el error del método se escribe

$$e_{n+1} = \alpha - h(x_n) + \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots$$

Escribiendo la ecuación para el error

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \alpha - g(x_n, y_n) \\
&= \alpha - \Bigg(g + \frac{\partial g}{\partial x}\,(x_n - \alpha) + \frac{\partial g}{\partial y}\,(y_n - \alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,(x_n - \alpha)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\,(x_n - \alpha)\,(y_n - \alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,(y_n - \alpha)^2 + \cdots \Bigg)
\end{aligned}$$

donde g y todas sus derivadas se evalúan en el punto (α, α). Realizando esta evaluación obtenemos (note que $f(\alpha) = 0$)

$$g(\alpha, \alpha) = \left(y - \frac{f(y)}{f'(x)} \right)(\alpha, \alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\alpha) &= \left(\frac{f(y)\,f''(x)}{f'^2(x)}\right)(\alpha,\alpha) = \frac{f(\alpha)\,f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} = 0,\\
\frac{\partial g}{\partial y}(\alpha,\alpha) &= \left(1-\frac{f'(y)}{f'(x)}\right)(\alpha,\alpha) = 1-\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(\alpha,\alpha) &= \left(\frac{f'(y)\,f''(x)}{f'^2(x)}\right)(\alpha,\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha,\alpha) &= \left(-\frac{2\,f(y)\,f''^2(x)}{f'^3(x)}\right)(\alpha,\alpha) = -\frac{2\,f(\alpha)\,f''^2(\alpha)}{f'^3(\alpha)} = 0,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha,\alpha) &= \left(-\frac{f''(y)}{f'(x)}\right)(\alpha,\alpha) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},
\end{aligned}
$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(x_n-\alpha)\,(y_n-\alpha) + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(y_n-\alpha)^2 + \cdots\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(y_n-\alpha)\,\left(2\,(x_n-\alpha)-(y_n-\alpha)\right) + \cdots,
\end{aligned}
$$

luego

$$
\frac{x_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)\,(x_n-\alpha)} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(2-\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}\right) + \cdots,
$$

y como

$$
y_n-\alpha = x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},
$$

entonces

$$
\frac{x_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)\,(x_n-\alpha)} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(2-1+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,x_n-\alpha}\right) + \cdots,
$$

con lo que aplicando límites a ambos miembros (y utilizando L'Hôpital donde sea necesario)

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,x_n-\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{f'(x_n)+f''(x_n)\,(x_n-\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 1,
$$

y finalmente, el primer límite solicitado,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)\,(x_n-\alpha)} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(2-1+1) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.
$$

Por otro lado, buscando un límite sólo en x_n,

$$y_n - \alpha = (x_n - \alpha)\left(1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n - \alpha)}\right),$$

con lo que

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1} - \alpha}{(y_n - \alpha)\,(x_n - \alpha)} &= \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2\left(1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n - \alpha)}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left(2 - \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left(1 + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n - \alpha)}\right) + \cdots,\end{aligned}$$

y

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left(1 - \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n - \alpha)}\right)^2\right) + \cdots,$$

pero aplicando límites mediante la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{f^2(x_n)}{f'^2(x_n)\,(x_n - \alpha)^2} \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,f(x_n)\,f'(x_n)}{2\,f'(x_n)\,f''(x_n)\,(x_n - \alpha)^2 + 2\,f'2(x_n)\,(x_n - \alpha)} \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f''(x_n)\,(x_n - \alpha)^2 + f'(x_n)\,(x_n - \alpha)} \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{f'''(x_n)\,(x_n - \alpha)^2 + 3\,f''(x_n)\,(x_n - \alpha) + f'(x_n)} \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{f'(x_n)} = 1,\end{aligned}$$

con lo que obtenemos el segundo límite del enunciado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = 0,$$

lo que significa que la convergencia es mayor que cuadrática.

Para obtener el tercer límite vamos a calcular $g'(\alpha)$, $g''(\alpha)$, $\ldots$; para ello vamos a estudiar dos pasos de la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} = g(x_n),$$

y donde, para simplificar, llamaremos

$$g(x) = x - \frac{f(x) + f(z)}{f'(x)}, \qquad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{df(z(x))}{dx} &= \frac{df(z)}{dz}\,\frac{dz(x)}{dx} = f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f}\, f' + \frac{\partial z}{\partial f'}\, f''\right) \\
&= f'(z)\left(1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f}{f'^2}\, f''\right) = f'(z)\left(\frac{f}{f'^2}\, f''\right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g'(\alpha) &= 1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f}{f'^2}\, f'' - f'(z)\,\frac{f\, f''}{f'^3} + \frac{f(z)}{f'^2}\, f'' \\
&= \frac{f\, f''}{f'^2} - f'(z)\,\frac{f\, f''}{f'^3} + f(z)\,\frac{f''}{f'^2} \\
&= 0, \qquad\qquad f(\alpha) = 0, \qquad z(\alpha) = \alpha.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g''(\alpha) &= \frac{f'\, f''}{f'^2} + \frac{f\, f'''}{f'^2} - \frac{2\, f\, f''^2}{f'^3} - f''(z)\,\frac{f^2\, f''^2}{f'^5} \\
&\quad - f'(z)\left(\frac{f''}{f'^2} + \frac{f\, f'''}{f'^3} - \frac{3\, f\, f''^2}{f'^4}\right) \\
&\quad + f'(z)\,\frac{f\, f''^2}{f'^4} + f(z)\left(\frac{f'''}{f'^3} - \frac{2\, f''^2}{f'^3}\right) \\
&= \frac{f'\, f''}{f'^2} - f'(z)\,\frac{f''}{f'^2} = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, un cálculo directo, que omitimos por brevedad, nos permite obtener

$$g'''(\alpha) = 3\,\frac{f''^2}{f'^2},$$

con lo que el error

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - \alpha &= g'(\alpha)\,(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}\,(x_n - \alpha)^2 \\
&\quad + \frac{g'''(\alpha)}{3!}\,(x_n - \alpha)^3 + O\big((x_n - \alpha)^4\big) \\
&= \frac{g'''(\alpha)}{3!}\,(x_n - \alpha)^3 + O\big((x_n - \alpha)^4\big),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^3} = \frac{3}{3!}\,\frac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)} + O((x_n-\alpha))$$

y obtenemos el tercer límite del enunciado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}.$$

10. Calcule el punto fijo y la tasa de orden de convergencia de la iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n \geq 0,$$

suponiendo que x_0 está cerca del punto fijo, donde

$$g(x) = \frac{x\,(x^2+3\,a)}{3\,x^2+a}, \qquad a \geq 0.$$

Solución. El punto fijo α de esta iteración es

$$\alpha = g(\alpha) = \frac{\alpha\,(\alpha^2+3\,a)}{3\,\alpha^2+a},$$

$$2\,\alpha^3 - 2\,a\,\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, \quad \alpha = \pm\sqrt{a}.$$

Ahora tenemos que estudiar la convergencia (y tasa de convergencia) para los tres puntos fijos que hemos obtenido. Como suponemos que x_0 está próximo a α, para la convergencia, es necesario que $|g'(\alpha)| < 1$ (por la continuidad de g' existe un entorno de α tal que $|g'(x)| < 1$ en dicho entorno). Calculando la primera derivada

$$g'(x) = \frac{(3\,x^2+3\,a)\,(3\,x^2+a) - (x^3+3\,a\,x)\,6\,x}{(3\,x^2+a)^2} = \frac{3\,(a-x^2)^2}{(a+3\,x^2)^2},$$

vemos que es una función par.

Para el punto fijo $\alpha = 0$, obtenemos

$$g'(0) = 3 > 1,$$

lo que indica que la iteración no converge a $\alpha = 0$ para x_0 cercano a α.

Para los puntos fijos $\alpha = \pm\sqrt{a}$, obtenemos

$$g'(\pm\sqrt{a}) = 0,$$

por lo que el método converge para x_0 suficientemente cercano a α. Para estudiar la tasa de convergencia necesitamos la segunda derivada

$$g''(x) = \frac{-36\,x\,(a-x^2)^2}{(a+3\,x^2)^3} - \frac{12\,x\,(a-x^2)}{(a+3\,x^2)^2} = \frac{48\,a\,x\,(-a+x^2)}{(a+3\,x^2)^3},$$

que nos da $g''(\pm\sqrt{a}) = 0$. Ahora tenemos que estudiar la tercera derivada

$$\begin{aligned} g'''(x) &= \frac{-864\,a\,x^2\,(-a+x^2)}{(a+3\,x^2)^4} + \frac{96\,a\,x^2}{(a+3\,x^2)^3} + \frac{48\,a\,(-a+x^2)}{(a+3\,x^2)^3} \\ &= -\frac{48\,a\,(a^2-18\,a\,x^2+9\,x^4)}{(a+3\,x^2)^4}, \end{aligned}$$

con lo que

$$g'''(\pm\sqrt{a}) = \frac{3}{2\,a} \neq 0,$$

por lo que este método tiene orden de convergencia cúbica,

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^3} = \frac{g'''(\alpha)}{3!} + O((\alpha - x_n))\,.$$

para estos dos puntos fijos.

11. **Examen 13/Marzo/1993**. Calcule el cero de $f(x) = x - 0{,}2\,\sin x - 0{,}5$, en el intervalo $[0{,}5, 1]$ con una exactitud de 6 cifras decimales en la mantisa por medio de los métodos

    a) bisección,

    b) regula falsi,

    c) Newton,

    d) secante,

    y determine los residuos para todos estos métodos

Solución. Primero hemos de notar que la función $f(x)$ es monótona creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que su derivada es siempre positiva. Por tanto, si existe una raíz ésta es única. Por el teorema de Bolzano,

$$f(0{,}5) = -0{,}0958851, \qquad f(1) = 0{,}331706,$$

la única raíz se encuentra en el intervalo considerado en el enunciado. Además debemos notar que una exactitud de 6 cifras decimales para un número en $[0{,}5, 1]$ requiere un error menor que $0{,}5 \times 10^{-6}$.

a) Método de bisección. En el método de bisección llamaremos

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad E = \frac{|a-c|}{2},$$

donde c es la bisección del intervalo y E es el error cometido tomando que la raíz está en el intervalo $[a, c]$ o $[c, b]$ según corresponda. Operando se obtiene la siguiente tabla

a	b	c	E	$f(c)$
0,5	1	0,75	0,13	0,11
0,5	0,75	0,625	0,063	0,0080
0,5	0,625	0,5625	0,031	−0,044
0,5625	0,625	0,59375	0,016	−0,018
0,59375	0,625	0,609375	0,0078	−0,0051
0,609375	0,625	0,617187	0,0039	0,0014
0,609375	0,617187	0,613281	0,0020	−0,0018
0,613281	0,617187	0,615234	0,00098	−0,00020
0,615234	0,617187	0,616211	0,00049	0,00062
0,615234	0,616211	0,615723	0,00024	0,00021
0,615234	0,615723	0,615479	0,00012	$8{,}66 \times 10^{-6}$
0,615234	0,615479	0,615356	0,000061	−0,000093
0,615356	0,615479	0,615417	0,000031	−0,000042
0,615417	0,615479	0,615448	0,000015	−0,000017
0,615448	0,615479	0,615463	$7{,}6 \times 10^{-6}$	$-4{,}1 \times 10^{-6}$
0,615463	0,615479	0,615471	$3{,}8 \times 10^{-6}$	$2{,}3 \times 10^{-6}$
0,615463	0,615471	0,615467	$1{,}9 \times 10^{-6}$	$-9{,}2 \times 10^{-7}$
0,615467	0,615471	0,615469	$9{,}5 \times 10^{-7}$	$6{,}8 \times 10^{-7}$
0,615467	0,615469	0,615468	$4{,}8 \times 10^{-7}$	$-1{,}2 \times 10^{-7}$

con lo que la raíz está en el intervalo $[0{,}615468, 0{,}615469]$ (tras 19 iteraciones) y podemos tomar como aproximación $x = 0{,}615468$ con un error menor que $0{,}48 \times 10^{-6}$.

b) Método regula falsi. Consiste en la iteración

$$c = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)},$$

y la elección de un nuevo intervalo según los signos de la función en estos tres puntos. Para determinar el final de la iteración podemos chequear la distancia entre dos aproximaciones a la raíz

$$E = |a - c|,$$

ya que como veremos, en este caso, el punto a queda fijo. Operando con una tabla del todo similar a la anterior obtenemos

a	b	c	E	$f(c)$
0,5	1.	0,612122	0,11	$-0{,}0028$
0,612122	1.	0,615368	0,0032	$-0{,}000084$
0,615368	1.	0,615465	0,000097	$-2{,}5 \times 10^{-6}$
0,615465	1.	0,615468	$2{,}9 \times 10^{-6}$	$-7{,}6 \times 10^{-8}$
0,615468	1.	0,615468	$8{,}8 \times 10^{-8}$	$-2{,}28 \times 10^{-9}$

con lo que la raíz es 0,615468 con seis dígitos de precisión.

c) Método de Newton. Consiste en la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - \frac{x - 0{,}2\,\sin(x) - 0{,}5}{1 - 0{,}2\,\cos(x)},$$

con lo que se obtiene la iteración

0,565719,	0,633106,	0,609100,	0,617754,
0,614646,	0,615764,	0,615362,	0,615506,
0,615454,	0,615473,	0,615466,	0,615469,
0,615468,	0,615468,		

con lo que la raíz es $x = 0{,}615468$.

d) Método de la secante. Consiste en la iteración

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x - \frac{x - 0{,}2\ \sin(x) - 0{,}5}{1 - 0{,}2\ \cos(x)},$$

con lo que se obtiene la iteración

$$\begin{array}{llll} 0{,}750000, & 1{,}000000, & 0{,}619662, & 0{,}615594, \\ 0{,}615468, & 0{,}615468, & & \end{array}$$

con lo que la raíz es $x = 0{,}615468$.

12. Para la iteración $x_{i+1} = \sqrt{2 + x_i}$ determine sus puntos fijos e intervalo de convergencia. Aplique 6 pasos de iteración funcional. Aplique la regla de la δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de dicha iteración.

Solución. Los puntos fijos de la iteración

$$\alpha = \sqrt{2 + \alpha}, \qquad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0,$$

son $\alpha = \pm 2$. Para que la iteración converja ha de poderse calcular

$$\exists g(x) = \sqrt{2 + x}, \qquad x > -2,$$

que cumpla

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2 + x}}\right| < 1, \qquad \frac{1}{4} < 2 + x,$$

luego $x > -7/4 > -2$, y, finalmente, como $g(x)$ es una función creciente, $g(-7/4) = -1/2$ y $\sqrt{2 + x} \le x$ cuando $|x| \gg 1$, entonces

$$g((-7/4, \infty)) = (-1/2, \infty) \subset (-7/4, \infty),$$

la convergencia al punto fijo $a = 2$ queda garantizada para valores iniciales $x_0 > -7/4 = -1{,}75$. El método no converge para el punto fijo $a = -2$.

Iterando 7 veces el método a partir de $x_0 = 0$, obtenemos

$$1{,}4142, \qquad 1{,}8478, \qquad 1{,}9616, \qquad 1{,}9904, \qquad 1{,}9976, \qquad 1{,}9994.$$

El método de la δ^2 de Aitken nos construye una nueva secuencia x_i' a partir de la secuencia calculada x_i. Si la secuencia original x_i se comporta asintóticamente como una sucesión geométrica, el método logra acelerar efectivamente su convergencia; en otros casos, puede que el método no acelere la convergencia. Vamos a construir la secuencia de Aitken

$$x_i' = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2\,x_{i+1} + x_i},$$

que nos permite obtener los 5 iterados

2,00208254, 2,00012537, 2,00000776, 2,00000048,

que obviamente convergen mucho más rápido que la sucesión original.

13. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1,$$

determine:

a) su número de raíces positivas,

b) su número de raíces negativas,

c) intervalos donde se encuentren cada una de sus raíces reales.

Solución. Para resolver este problema vamos a utilizar el método de las sucesiones de Sturm (que tiene como único defecto que sólo determina el número de raíces distintas). La sucesión de Sturm más simple es

$$p_1(x) = p(x), \qquad p_2(x) = -p'(x) = -4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 1,$$

$$p_i = \mathrm{mod} p_{i-2}(x), p_{i-1}(x),$$

que se obtiene fácilmente utilizando el algoritmo de Euclides de división de polinomios, dando

$$16\,p_1(x) = (1 - 4\,x)\,p_2(x) \underbrace{-11\,x^2 + 10\,x - 15}_{p_3(x)},$$

$$121\,p_2(x) = (44\,x + 7)\,p_3(x) \underbrace{+832\,x - 16}_{p_4(x)},$$

$$43264\, p_3(x) = (509 - 572\, x)\, p_2(x) \underbrace{-640816}_{p_5(x)},$$

con lo que obtenemos la tabla de signos

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	total
$-\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
-1	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
2	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3

que nos indica que existen 2 raíces reales distintas, una de ellas (negativa) en $[-1, -2]$ y la otra (positiva) en $[1, 2]$.

Nota: aplicando el criterio de los signos de Descartes obtenemos que hay tres cambios de signo v_p y por tanto el número de raíces positivas n_p cumple que $v_p - n_p \in \{0, 2, 4\}$, luego o hay 1 raíz positiva o hay tres. En cuanto al número de raíces negativas, aplicando Descartes a $q(x) = p(-x)$, obtenemos $v_q = 1$ y por tanto $v_q - n_q \in \{0, 2, 4\}$, hay exactamente una raíz negativa.

Nota: aplicando el criterio de Cauchy que dice que las raíces están incluidas en el disco de radio

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Para $p(x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota superior $|x_i| < 2$. Para $p(1/x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota inferior $|x_i| > 1/2$. Como sabemos por el criterio de Descartes que hay una raíz negativa, esta estará en el intervalo $[-2, -1/2]$. La raíz, o las tres, reales positivas del polinomio estarán en el intervalo $[1/2, 2]$.

14. Calcule los ceros de $x^7 - 1 = 0$. Explique la elección de su método. Solución. Las 7 raíces de esta ecuación son números complejos (raíces 7-ésimas de la unidad). Para obtenerlas podemos utilizar un método para raíces reales para los dos sistemas de ecuaciones que se obtienen para la parte real y para la imaginaria, independientemente,

$$(a + \mathrm{i}\, b)^7 = 0,$$

$$a^7 - 21 * a^5 * b^2 + 35 * a^3 * b^4 - 7 * a * b^6 = 0,$$
$$7 * a^6 * b - 35 * a^4 * b^3 + 21 * a^2 * b^5 - b^7 = 0,$$

es decir, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene siete soluciones. Podemos utilizar el método de Newton con deflación de Maehly para raíces complejas, etc.

Dado que se trata de un polinomio también podemos usar un método específico para raíces complejas como el método de Müller o el de Bairstow. El método de Müller se ha codificado en Matlab (Enrique López de los Mozos Ingelmo) como aparece en las páginas siguientes.