Séptima relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 18 de Enero de 1999

Ejercicios del tema de interpolación y aproximación.

1. Aproxime la función e^x

   a) linealmente por $y = a\,x + b$, cerca de $x = 0$;

   b) racionalmente por $y = \frac{a\,x+b}{x+c}$, cerca de $x = 0$.

2. Algunos métodos de aproximación para una función $f(x)$ se basan en la definición de un funcional

$$F(f) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij}\, \frac{d^j f}{dx^j}(x_{ij}) + E(f),$$

tal que $E(f) = 0$ cuando f es un polinomio de grado

$$N = \sum_{j=0}^{n} m_j - 1,$$

donde w_{ij} son pesos. Como un polinomio no es más que una combinación lineal de monomios x^k, tenemos que basta probar que

$$E(x^k) = 0, \qquad F(x^k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij}\, \frac{d^j x^k}{dx^j}(x_{ij}),$$

para $k \leq N$. Dados $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$, desarrolle un método como el indicado más arriba y aproxime o calcule los valores aproximados de

$$f(\frac{a+b}{2}), \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Una función $f(x)$ se pretende aproximar racionalmente por

$$R_{mn}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

donde

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i, \qquad Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i,$$

tal que

$$R_{mn}(x_j) = f(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

a) ¿Cuál es la relación entre m, n y s?

b) Para $x_j = 0, 1, 2$; $f(x_j) = 1, 3, 3$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$?

c) Para $x_j = 0, 2, 3$; $f(x_j) = -1, 1, 1/2$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$? Indique algunas propiedades relativas a la continuidad $R_{mn}(x)$.

4. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 2 tal que

$$p(x_0) = y_0, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_1) = y'_1.$$

5. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_2) = y'_2,$$

donde $x_i = x_0 + i\,h$ e y_i, y'_0, y'_2 son dadas.

6. Considere la función racional

$$p(x) = \frac{a + b\,x}{1 + c\,x},$$

que satisface $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. ¿Exista tal función $p(x)$?

7. Sea el polinomio lineal de Lagrange que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. Suponga que el ordenador introduce errores de redondeo al evaluar $f(x_i)$, con lo que

$$\hat{f}(x_0) = f(x_0) + \epsilon_0, \qquad \hat{f}(x_1) = f(x_1) + \epsilon_1;$$

¿cuál es el error total de interpolación cometido? Considere tanto errores de interpolación como de redondeo.

8. Dada la siguiente tabla de valores equiespaciados de una función creciente y cóncava

304319	419327	545811	683100
326313	443655	572433	711709
348812	468529	599475	740756
371806	493852	626909	770188
395285	519615	654790	800000

que va a ser utilizada para interpolar dicha función mediante diferencias finitas. ¿Puede determinar si existen errores en dicha tabla? En caso afirmativo, corrija dichos errores.

9. Sea $p_2(x)$ un polinomio cuadrático que interpola la función $f(x)$ en los puntos x_0, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$; ¿cuál es el error de $f'(x_i) - p_2'(x_i)$, $i = 0, 1, 2$? Suponga que $f \in \mathrm{C}^3[x_0, x_2]$ y calcule cotas para estos errores.

10. Dados los valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, el polinomio interpolador puede usarse para determinar los ceros de la función $f(x) = 0$. Por ejemplo, los métodos de regula falsi y de Müller se basan en este procedimiento. Utilice la interpolación para determinar la función inversa $x(f)$ y los ceros de la función f. Determine los errores de interpolación que comete.

11. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

12. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

13. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

14. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

15. Calcule el polinomio de grado ≤ 3 tal que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \left(e^x - p(x)\right)^2 \, dx.$$

16. Dada una función $f(x)$ de la que sólo se conocen sus valores $f(x_n)$ donde

$$x_n = 10 + \frac{n-1}{5}, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6.$$

Determine una parábola que aproxime esta función mínimo-cuadráticamente.

17. Haga el ejercicio anterior pero usando polinomios ortogonales con respecto a una función peso $r(x) = w(x) = 1$. ¿Cuál es la diferencia más significativa entres las soluciones de los dos ejercicios?

18. Calcule una cota inferior del error de interpolación $|f(x) - p_n(x)|$ para $f(x) = \ln x$, $n = 3$ en el punto $x = 3/2$, si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/3$ y $x_3 = 2$.