Octava relación de problemas — Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro — 8 de Marzo de 1999

Ejercicios de los temas de derivación e integración numéricas.

1. Una regla de integración gaussiana o de Gauss se define como
$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$
donde los w_j son pesos positivos y la ecuación anterior debe satisfacerse para todos los monomios de grado $\leq n$. Calcule w_j y x_j para $w(x) \equiv 1$ y (1) n=1, y (2) n=2. Compare los x_j que ha obtenido con los ceros de los polinomios de Legendre.

2. Considere el método de integración de Gauss
$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$
con $n = 1$ y $n = 2$, y
$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Deduzca w_j y x_j. ¿Cuál es la relación entre x_j y las raíces de los polinomios de Chebyshev?

3. Determine el error cometido cuando
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p_n(x)\, dx,$$
para $n = 0, 1$ y donde p_n es un polinomio interpolante de $f(x)$.

4. Determine el error de integración del método del punto medio utilizando su definición (sin aplicar directamente los resultados vistos en teoría).

5. En la regla de integración de Simpson se tiene
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4\, f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right).$$
Suponga que al aplicar dicha regla se cometen errores de redondeo ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 al evaluar $f(a)$, $f((a+b)/2)$ y $f(b)$, respectivamente. Estudie como afectan estos errores de redondeo al error de integración de la fórmula de Simpson.

6. La ecuación de Laguerre es
$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\frac{dy}{dx} + n\,y = 0.$$
Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto (Sturm-Liouville). Desarrolle el método de integración de Gauss-Laguerre, es decir, el método de Gauss basado en polinomios ortogonales de Laguerre.

7. La ecuación de Hermite es
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + 2\,n\,y = 0.$$
Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto. ¿Cómo evaluaría la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$
utilizando las autofunciones de la ecuación de Hermite?

8. Demuestre que si
$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \qquad a \le x_i \le b,$$
no mantiene su signo constante en el intervalo $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = 0.$$
A partir de este resultado, demuestre en detalle que el error de integración numérica de Newton-Cotes es
$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx = \frac{f^{(n+k)}(\eta)}{(n+k)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n+k}(x-x_i)\,dx,$$
donde p_n es el polinomio interpolador de Newton para los nodos $\{x_i\}$, $i=0,1,\ldots n$, y se cumple que
$$\text{signo}\left(\prod_{i=0}^{n+k}(x-x_i)\right) \equiv \text{constante}, \qquad x\in[a,b],$$
$$\text{signo}\left(\prod_{i=0}^{n+j}(x-x_i)\right) \not\equiv \text{constante}, \qquad 0\le j<k, \quad x\in[a,b].$$

9. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimice

$$\int_{-1}^{1} (\sin \pi\, x - p(x))^2 \; dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2. Dicho polinomio se conoce como aproximación mínimo cuadrática de Legendre. Calcule la derivada de $\sin \pi\, x$ utilizando dicho polinomio.

10. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\arccos x - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2. ¿En qué intervalo está definido el arcocoseno?. Calcule el error de aproximación.

11. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ una aproximación a $f(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Define

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Si $p(x)$ es un polinomio, ¿qué es $q(x)$? ¿Cuál es el error

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty ?.$$

Nota:

$$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

12. Dada la siguiente tabla de valores

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,70010	0,40160	0,10810	−0,17440	−0,43750

y trabajando con aritmética de cinco cifras decimales, calcule:

a) La derivada primera de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h (espaciado entre puntos). Una vez calculados estos valores, determine $f'(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

b) La derivada segunda de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h. Una vez calculados estos valores, determine $f''(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

c) El polinomio de interpolación de $f(x)$. Una vez calculado este polinomio determine a partir de él los valores $f'(0{,}3)$ y $f''(0{,}3)$.

d) El valor de

$$\int_{0,1}^{0,5} f(x)\,dx,$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta.

e) El punto x_F tal que $f(x_F) = 0$ con $0{,}3 \leq x_F \leq 0{,}4$.

f) El punto x_T tal que

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x)\,dx = 0{,}1020.$$

13. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x\, e^{-x^2}\,dx,$$

b)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4\, e^{-x^2}\,dx.$$

14. Dada la siguiente tabla

x	0	1/4	1/2	3/4	1
$f(x)$	1	2	1	0	1

.

a) Deduzca si hay inconsistencias o errores en ella. Justifique sus resultados

b) Sin más información que la dada en la tabla, estime la pendiente de f en el punto $x = 1/2$, y justifique sus resultados, exactitud, etc.

c) Sin más información que la dada en la tabla, estime

$$\int_0^1 f\,dx,$$

y justifique sus resultados, exactitud, etc.

d) Suponga ahora que f es analítica. Estime las derivadas primera, segunda, tercera, cuarta y quinta de f (con respecto a x) en el punto $x = 1/2$. Justifique sus respuestas y los métodos utilizados para obtenerlas, además calcule los errores que crea haber cometido.

e) Sin más información que la dada en la tabla, suponga que quiere aproximar la función f que no conoce por mínimos cuadrados. Es decir, quiere buscar unos polinomios ortogonales $p_j(x)$ tales que

1)

$$\sum_{i=1}^{N} p_j(x_i)\,p_k(x_i) = 0, \qquad 0 \le j \ne k \le M,$$

donde N es el número de puntos dado en la tabla cuyas coordenadas son x_i, y j y k son los grados de dichos polinomios. Estos polinomios aproximan la función f por mínimos cuadrados, es decir,

2)

$$\sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - p(x_i)\right)^2,$$

es mínimo, donde $p(x)$ viene dado por

3)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j\,p_j(x).$$

¿Cuáles son los valores de a_j? Calcule los cuatro primeros polinomios ortogonales teniendo en cuenta que se pueden escribir como

$$p_k(x) = x^k + b_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + b_1\,x + b_0,$$

puesto que las constantes del monomio de mayor grado se pueden incluir en los a_j.

f) Determine si hay alguna relación entre $14e1$, $14e2$ y $14e3$ y la teoría de Sturm-Liouville. Asímismo, determine si hay alguna relación entre los coeficientes de a_j y la teoría de Sturm-Liouville. Justifique completamente sus resultados.

g) En general, $p_j(x_i) \neq 0$ para los valores de x_i dados en la tabla, por lo que los polinomios del apartado $14e$ no son polinomios de Newton. ¿Qué representan pues estos polinomios? ¿Qué exactitud tienen? Justifique sus respuestas.

15. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos puntos reales que se quieren interpolar mediante la expresión

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \, e^{j\,x},$$

tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

donde las coordenadas y_i son conocidas.

a) ¿Es el interpolante único? Demuestre su respuesta.

b) ¿Cómo utilizaría dicho interpolante para determinar las derivadas de la función interpolada?

c) ¿Cómo utilizaría dicho interpolante para determinar la integral definida entre x_0 y x_n de la función interpolada?