

SOLUCIONES:

1. Una regla de integración gaussianiana o de Gauss se define como

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j),$$

donde los w_j son pesos positivos y la ecuación anterior debe satisfacerse para todos los monomios de grado $\leq n$. Calcule w_j y x_j para $w(x) \equiv 1$ y (1) $n=1$, y (2) $n=2$. Compare los x_j que ha obtenido con los ceros de los polinomios de Legendre.

Solución. Para el caso $n = 1$ tenemos la regla de integración gaussianiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1),$$

que deberá ser exacta para

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_1 \cdot 1,$$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1,$$

por lo que

$$x_1 = 0, \quad w_1 = 2, \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 f(0),$$

que coincide con el teorema del valor medio.

Para el caso $n = 2$ tenemos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

que deberá ser exacta para

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_1 + w_2,$$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2,$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2,$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3,$$

cuya solución por sustitución nos da

$$w_1 = 2 - w_2, \quad (2 - w_2) x_1 + w_2 x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{w_2 - 2}{w_2} x_1,$$

$$\frac{2}{3} = x_1^2 (w_2 - 2) \left(\frac{w_2 - 2}{w_2} - 1 \right) = -\frac{2}{w_2} (w_2 - 2) x_1^2,$$

$$x_1^2 = \frac{w_2}{3(2 - w_2)},$$

$$(2 - w_2) x_1^3 + w_2 \left(\frac{w_2 - 2}{w_2} \right)^3 x_1^3 = 0, \quad (w_2 - 2) x_1^3 4 \frac{1 - w_2}{w_2^2} = 0,$$

con lo que obtenemos las tres soluciones

$$(A) \quad w_2 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty,$$

$$(B) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_1 = 2,$$

$$(C) \quad w_2 = 1, \quad w_1 = 1, \quad x_1^2 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -x_1,$$

de las que (A) no es válido porque $x_i \notin (-1, 1)$, (B) porque es la solución que hemos obtenido previamente y finalmente (C) nos permite obtener la regla de integración buscada

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Recordando que los polinomios de Legendre $L_j(x)$ son

$$L_0 = 1, \quad L_1 = x, \quad L_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

cuyos ceros son

$$L_1(x) = 0, \quad x = 0,$$

$$L_2(x) = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

y coinciden con los puntos utilizados en las fórmulas de integración gaussianas. A las fórmulas de integración obtenidas se las denomina de Gauss-Legendre.

2. Considere el método de integración de Gauss

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j),$$

con $n = 1$ y $n = 2$, y

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Deduzca w_j y x_j . ¿Cuál es la relación entre x_j y las raíces de los polinomios de Chebyshev?

Solución. Para $n = 1$, la fórmula de integración buscada es

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx w_1 f(x_1),$$

que tiene que ser exacta para los primeros monomios. Para calcular las integrales que vamos a obtener tenemos que realizar el cambio de variable

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^0 \frac{f(\cos \theta)}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} f(\cos \theta) d\theta.$$

De esta forma, obtenemos

$$\int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi = w_1,$$

$$\int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0 = w_1 x_1, \quad x_1 = 0,$$

y obtenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx \pi f(0).$$

Para $n = 2$, la fórmula de integración buscada es

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

que tiene que ser exacta para

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 1 d\theta &= \pi = w_1 + w_2, \\ \int_0^\pi \cos \theta d\theta &= 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2, \\ \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta &= \frac{\pi}{2} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, \\ \int_0^\pi \cos^3 \theta d\theta &= 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3,\end{aligned}$$

cuya solución por sustitución nos permite obtener

$$\begin{aligned}w_1 &= \pi - w_2, & x_2 &= \frac{w_2 - \pi}{w_2} x_1, \\ \frac{\pi}{2} &= (\pi - w_2) x_1^2 \left(1 + \frac{\pi - w_2}{w_2}\right), & x_1^2 &= \frac{w_2}{2(\pi - w_2)}, \\ 0 &= (\pi - w_2) x_1^3 \left(1 - \frac{(\pi - w_2)^2}{w_2^2}\right),\end{aligned}$$

cuyas tres soluciones son

$$\begin{aligned}(A) \quad & w_2 = \pi, \quad w_1 = 0, \quad x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty, \\ (B) \quad & x_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_1 = \pi, \quad x_2 = 0, \\ (C) \quad & w_2^2 - \pi^2 - w_2^2 + 2\pi w_2 = 0, \quad w_2 = \frac{\pi}{2}, \\ & w_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = -x_2,\end{aligned}$$

de las que sólo (C) es solución válida, con lo cual

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Los polinomios de Chebyshev $T_j(x)$, normalizados para que $T_j(1) = 1$, son

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

cuyas raíces coinciden con los nodos de integración que hemos obtenido.

3. Determine el error cometido cuando

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx,$$

para $n = 0, 1$ y donde p_n es un polinomio interpolante de $f(x)$.

Solución. Para $n = 0$, hay dos polinomios interpolantes $p_0(x) = f(a)$ y $p_0(x) = f(b)$. Estudiaremos el primero de ellos, cuya fórmula de error de interpolación es

$$f(x) - p_0(x) = f[a, x] (x - a),$$

cuya integración nos da tras aplicar el teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b p_0(x) dx + \int_a^b f[a, x] (x - a) dx \\ &= \int_a^b p_0(x) dx + f[a, \xi] \int_a^b (x - a) dx, \end{aligned}$$

para $a \leq \xi \leq b$. De esta forma

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_0(x) dx = f[a, \xi] \frac{(b - a)^2}{2} = f'(\eta) \frac{(b - a)^2}{2},$$

donde $a < \eta < b$. De forma análoga se obtiene un resultado del todo similar para $p_0(x) = f(b)$.

Para un polinomio lineal, $n = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b p_1(x) dx + \int_a^b f[a, b, x] (x - a) (x - b) dx \\ &= \int_a^b p_1(x) dx - f[a, b, \xi] \frac{(b - a)^3}{6}, \end{aligned}$$

donde $a \leq \xi \leq b$ y obtenemos el error de integración

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_1(x) dx = -\frac{f''(\eta)}{2} \frac{(b - a)^3}{6},$$

donde $a < \eta < b$.

4. Determine el error de integración del método del punto medio utilizando su definición (sin aplicar directamente los resultados vistos en teoría).

Solución. El método de integración del punto medio se basa en utilizar la aproximación polinómica

$$f(x) \approx p_0(x) = f(c), \quad c = \frac{a+b}{2},$$

que interpola a f en el punto c . Por tanto, el error de interpolación es

$$f(x) = f(c) + f[c, x](x - c),$$

sin embargo, no podremos calcular el error de integración como en el ejercicio anterior debido a que

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx = 0,$$

por lo que tendremos que introducir un punto intermedio adicional, sea el propio c , es decir,

$$f(x) = f(c) + f[c, c](x - c) + f[c, c, x](x - c)^2,$$

con lo que el error de integración

$$\int_a^b (f(x) - f(c)) dx = f[c, c, \xi] \int_a^b (x - c)^2 dx = \frac{f''(\eta)}{2} \frac{(b-a)^3}{12},$$

donde $a \leq \eta, \xi \leq b$.

5. En la regla de integración de Simpson se tiene

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Suponga que al aplicar dicha regla se cometen errores de redondeo ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 al evaluar $f(a)$, $f((a+b)/2)$ y $f(b)$, respectivamente. Estudie como afectan estos errores de redondeo al error de integración de la fórmula de Simpson.

Solución. Sea $fl(x)$ el número flotante asociado a x , y denotemos los errores flotantes en los datos de la función de la forma

$$fl(f(a)) = f(a) + \epsilon_1, \quad fl(f(b)) = f(b) + \epsilon_1, \quad fl(f(c)) = f(c) + \epsilon_1,$$

donde $c = (a + b)/2$. La evaluación numérica de la regla de Simpson nos da

$$S = S_{AE} + E_R = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)) + \frac{b-a}{6} (\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + \epsilon_3),$$

donde S es la regla de Simpson evaluada numéricamente, S_{AE} es la regla de Simpson evaluada con aritmética exacta y E_R es el error de redondeo.

Además del error de redondeo tenemos error de integración,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - p_2(x)) &= \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) dx \\ &= f[a, b, c, \xi] \int_0^{b-a} y(y+a-c)(y+a-b) dy \\ &= f[a, b, c, \xi] (b-a)^4 = \frac{f'''(\eta)}{3!} (b-a)^4, \end{aligned}$$

con lo que tenemos que el error es

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{AE} \right| \leq \frac{|f'''(\eta)|}{3!} (b-a)^4 + \frac{b-a}{6} (|\epsilon_1| + 4|\epsilon_2| + |\epsilon_3|),$$

donde se observa la componente debida al error de truncado y la debida al error de redondeo.

6. La ecuación de Laguerre es

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + n y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto (Sturm-Liouville). Desarrolle el método de integración de Gauss-Laguerre, es decir, el método de Gauss basado en polinomios ortogonales de Laguerre.

Solución. La ecuación de Laguerre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1-x}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{n}{x} y = 0,$$

en forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx} \left(x e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + n e^{-x} y = 0.$$

Las fórmulas de integración de Gauss-Laguerre se basan en el uso de polinomios $r(x)$ -ortogonales (con $r(x) = \exp -x$) de Laguerre $L_i(x)$ y permiten calcular integrales como

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty e^{-x} g(x) dx, \quad g(x) = f(x) e^x,$$

en la forma

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty e^{-x} g(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j g(x_j).$$

Los polinomios ortogonales de Laguerre cumplen la condición de ortonormalidad

$$\langle L_i, L_j \rangle_r = \int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx = 0,$$

que permite determinarlos fácilmente. Por ejemplo, los dos primeros polinomios

$$L_0 = a_0, \quad L_1 = a_1 + b_1 x,$$

son

$$\langle L_0, L_0 \rangle_r = a_0^2 \int_0^\infty e^{-x} dx = a_0^2,$$

$$\langle L_0, L_1 \rangle_r = a_0 \left(a_1 \int_0^\infty e^{-x} dx + b_1 \int_0^\infty x e^{-x} dx \right) = a_0 (a_1 + b_1) = 0,$$

con lo que $a_1 = -b_1$ y

$$L_1(x) = b_1 (x - 1).$$

La raíz de $L_1(x)$ es $x = 1$, por lo que una fórmula de Gauss-Laguerre exacta hasta polinomios de primer orden es exacta para

$$\int_0^\infty e^{-x} 1 dx = 1 = w_1 1,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x dx = 1 = w_1 x_1,$$

nos da

$$\int_0^\infty f(x) dx = 1 g(1) = e f(1).$$

7. La ecuación de Hermite es

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto. ¿Cómo evaluaría la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

utilizando las autofunciones de la ecuación de Hermite?

Solución. La ecuación de Hermite en forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + 2n e^{-x^2} y = 0,$$

y si H_i y H_j son soluciones de esta ecuación correspondientes a $n_i \neq n_j$ entonces son ortogonales con el producto interior

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_i H_j dx = 0.$$

Los dos primeros polinomios de Hermite son

$$\langle H_0, H_0 \rangle_r = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_0^2 dx = 2a_0^2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} a_0^2,$$

$$\langle H_0, H_1 \rangle_r = a_0 b_1 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx + a_0 a_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = a_0 a_1 \sqrt{\pi} = 0,$$

luego

$$H_0(x) = a_0, \quad H_1(x) = b_1 x,$$

siendo el cero de H_1 el punto $x = 0$, con lo que las fórmulas de integración de Gauss-Hermite toman la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x) dx = \sum_{j=1}^N w_j g(x_j),$$

donde

$$g(x) = e^{x^2} f(x).$$

Estas fórmulas deben ser exactas para los primeros monomios, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 1 dx = \sqrt{\pi} = w_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x dx = 0 = w_1 x_1, \quad x_1 = 0,$$

y finalmente, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx \approx w_1 g(x_1) = \sqrt{\pi} g(0) = \sqrt{\pi} f(0).$$

8. Demuestre que si

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad a \leq x_i \leq b,$$

no mantiene su signo constante en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx = 0.$$

A partir de este resultado, demuestre en detalle que el error de integración numérica de Newton-Cotes es

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \frac{f^{(n+k)}(\eta)}{(n+k)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n+k} (x - x_i) dx,$$

donde p_n es el polinomio interpolador de Newton para los nodos $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, y se cumple que

$$\text{signo} \left(\prod_{i=0}^{n+k} (x - x_i) \right) \equiv \text{constante}, \quad x \in [a, b],$$

$$\text{signo} \left(\prod_{i=0}^{n+j} (x - x_i) \right) \not\equiv \text{constante}, \quad 0 \leq j < k, \quad x \in [a, b].$$

Solución. Obviamente el primer resultado a demostrar es falso, ya que por ejemplo $(x - 1/2)(x - 1/4)$ no mantiene su signo en $[0, 1]$ y sin embargo

$$\int_0^1 (x - 1/2)(x - 1/4) dx = 1/12 \neq 0.$$

Demostremos la fórmula del error para la integración numérica de Newton-Cotes directamente. Dicho error toma la forma

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx,$$

dada la fórmula de Lagrange para el error de interpolación polinómica. Si la integral

$$\int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i) dx,$$

es nula, el error $E(f)$ no será nulo, sino que tendremos que introducir puntos adicionales, sean x_{n+1}, \dots, x_{n+m} , normalmente repetición de alguno de los existentes, con objeto de que sea no nula. Para cada punto adicional, sea x_{n+1} , interpolaré la diferencia dividida en la forma

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] + f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}). \quad (1)$$

De este modo obtendré para el error de integración tras haber añadido m puntos adicionales

$$E(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_{n+m}, x] \prod_{i=0}^{n+m} (x - x_i) dx.$$

Si además queremos aplicar el teorema del valor medio integral para sacar fuera de la integral una derivada de la función f de orden $n+m+1$ es necesario que el productorio del integrando tenga signo constante. Si el productorio no tiene signo constante, he de añadir puntos adicionales utilizando la ecuación (1) hasta conseguir que lo tenga y obtendré para el error de integración de Newton-Cotes, tras haber añadido otros k puntos adicionales

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{j=1}^k f[x_0, \dots, x_{n+m}, \dots, x_{n+m+j}] \int_a^b \prod_{i=1}^{n+m+j-1} (x - x_i) dx \\ &\quad + \int_a^b f[[x_0, \dots, x_{n+m}, \dots, x_{n+m+k}, x] \prod_{i=1}^{n+m+k} (x - x_i) dx \end{aligned}$$

y aplicando el teorema del valor medio integral

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{j=1}^k \frac{f^{(n+m+j)}(\eta_j)}{(n+m+j)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n+m+j-1} (x - x_i) dx \\ &\quad + \frac{f^{(n+m+k+1)}(\eta)}{(n+m+k+1)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n+m+k} (x - x_i) dx. \end{aligned}$$

donde $a < \eta_j, \eta < b$, para $j = 1, \dots, k$.

9. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimice

$$\int_{-1}^1 (\sin \pi x - p(x))^2 dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2 . Dicho polinomio se conoce como aproximación mínimo cuadrática de Legendre. Calcule la derivada de $\sin \pi x$ utilizando dicho polinomio.

Solución. Para aproximar mínimo-cuadráticamente con polinomios de Legendre primero deberemos calcularlos. Sean

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = A_1 x + B_1, \quad P_2(x) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2,$$

Calculándolos (con la normalización $P_i(1) = 1$) obtenemos

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 (A_1 x + B_1) dx = 2 B_1 = 0,$$

$$P_1(1) = A_1 + B_1 = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) dx = \frac{2}{3} A_2 + 2 C_2 = 0,$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 x (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) dx = \frac{2}{3} B_2 = 0,$$

$$P_2(1) = 1 = A_2 + C_2, \quad \frac{2}{3} A_2 + 2 C_2 = 0,$$

$$A_2 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1).$$

La aproximación mínimo-cuadrática vendrá dada por

$$f(x) \approx Q(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x),$$

donde

$$A_i = \frac{\langle f, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx}{\int_{-1}^1 P_i^2(x) dx}.$$

En nuestro caso, $f = \sin \pi x$, obtenemos

$$A_0 = \frac{\int_{-1}^1 \sin \pi x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = 0.$$

$$A_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \sin \pi x \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{2/\pi}{2/3} = \frac{3}{\pi},$$

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \sin \pi x \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = 0,$$

luego

$$Q(x) = \frac{3}{4}x,$$

que como vemos es una expresión lineal.

Si consideramos que el grado del polinomio fuera 3, tendríamos

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \sin \pi x \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{2(\pi^2 - 15)/\pi^3}{2/7} \approx -1,158,$$

y obtenemos

$$Q(x) = -0,782x + 2,90x^3,$$

que es una aproximación mucho mejor.

10. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimiza

$$\int_{-1}^1 \frac{(\arccos x - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2 . ¿En qué intervalo está definido el arcocoseno?. Calcule el error de aproximación.

Solución. La función $f(x) = \arccos x$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$. La integral que tenemos que minimizar corresponde al producto interior compensado de Chebyshev

$$\langle f, g \rangle_r = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$$

y por tanto tendremos que buscar una solución entre los polinomios de Chebyshev. Los polinomios hasta segundo grado se obtienen de la recurrencia

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1},$$

y son

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

con la condición de normalización $T_i(1) = 1$. De esta forma nuestro polinomio se puede desarrollar como

$$p(x) = \sum_{j=0}^2 \alpha_j T_j(x), \quad \alpha_j = \frac{\langle \arccos x T_j(x) \rangle_r}{\langle T_j(x), T_j(x) \rangle_r}.$$

Tendremos que calcular las siguientes integrales

$$\alpha_0 = \frac{\langle f, T_0 \rangle_r}{\langle T_0, T_0 \rangle_r} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\int_0^\pi \theta d\theta}{-\arccos x \Big|_{-1}^1} = \frac{\pi^2/2}{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle f, T_1 \rangle_r}{\langle T_1, T_1 \rangle_r} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\int_0^\pi \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta} = \frac{-2}{\pi/2} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle f, T_2 \rangle_r}{\langle T_2, T_2 \rangle_r} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{(2x^2-1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{(2x^2-1)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\int_0^\pi \theta (2 \cos^2 \theta - 1) d\theta}{\int_0^\pi \cos^2 2\theta d\theta} = \frac{0}{\pi/2} = 0,$$

luego

$$p(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} x.$$

El error cuadrático medio para esta aproximación es

$$\int_{-1}^1 \frac{(\arccos x - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^4 - 96}{12\pi} \approx 0,0374.$$

11. Sea $f(x) \in C^1[a, b]$ y $p(x)$ una aproximación a $f(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Define

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Si $p(x)$ es un polinomio, ¿qué es $q(x)$? ¿Cuál es el error

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty?.$$

Nota:

$$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \quad g \in C[a, b].$$

Solución. Es obvio comprobar que

$$q(x) = f(x) - \int_a^x (f'(t) - p(t)) dt = f(a) + \int_a^x p(t) dt,$$

es un polinomio de grado $n + 1$ si $p(x)$ es un polinomio de grado n .

Más aún,

$$|f(x) - q(x)| = \left| \int_a^x (f'(t) - p(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t) - p(t)| dt \leq \|f' - p\|_\infty \int_a^x dt,$$

luego

$$\|f - q\|_\infty \leq \|f' - p\|_\infty (b - a) \leq \epsilon (b - a).$$

12. Dada la siguiente tabla de valores

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,70010	0,40160	0,10810	-0,17440	-0,43750

y trabajando con aritmética de cinco cifras decimales, calcule:

- La derivada primera de $f(x)$ en el punto $x = 0,3$, para distintos valores de h (espaciado entre puntos). Una vez calculados estos valores, determine $f'(0,3)$ por extrapolación de Richardson.
- La derivada segunda de $f(x)$ en el punto $x = 0,3$, para distintos valores de h . Una vez calculados estos valores, determine $f''(0,3)$ por extrapolación de Richardson.
- El polinomio de interpolación de $f(x)$. Una vez calculado este polinomio determine a partir de él los valores $f'(0,3)$ y $f''(0,3)$.
- El valor de

$$\int_{0,1}^{0,5} f(x) dx,$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta.

- El punto x_F tal que $f(x_F) = 0$ con $0,3 \leq x_F \leq 0,4$.
- El punto x_T tal que

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x) dx = 0,1020.$$

Solución.

- a) Para calcular la primera derivada de $f(x)$ en el punto $x = 0,3$, utilizaremos la expresión de segundo orden de precisión

$$f'(x) = f'_h(x) + O(h^2) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(x)h^2}{6} + O(h^4),$$

y dos pasos de malla, de forma que restando

$$f'_{2h} - f'_h = \frac{f'''(x)h^2}{2} + O(h^4),$$

y por extrapolación de Richardson

$$f'(x) = f'_h(x) + \frac{f'_h(x) - f'_{2h}(x)}{3} + O(h^4).$$

Operando con cinco dígitos de precisión

$$f'_{0,1}(0,3) = -2,8800, \quad f'_{0,2}(0,3) = -2,8440, \quad f'(0,3) = -2,8920.$$

- b) Para calcular la segunda derivada de $f(x)$ en el punto $x = 0,3$, utilizaremos la expresión de segundo orden de precisión

$$f''(x) = f''_h(x) + O(h^2) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(x)h^2}{12} + O(h^4),$$

y dos pasos de malla, de forma que restando

$$f''_{2h} - f''_h = \frac{f^{(4)}(x)h^2}{4} + O(h^4),$$

y por extrapolación de Richardson

$$f''(x) = f''_h(x) + \frac{f''_h(x) - f''_{2h}(x)}{3} + O(h^4).$$

Operando con cinco dígitos de precisión

$$f''_{0,1}(0,3) = 1,1000, \quad f''_{0,2}(0,3) = 1,1600, \quad f''(0,3) = 1,0800.$$

- c) Escribiremos el polinomio interpolador en la forma de Newton mediante diferencias divididas

$$p(x) = f[0,1] + f[0,1,0,2](x-0,1) + \dots \\ + f[0,1,0,2,0,3,0,4,0,5](x-0,1) \dots (x-0,5).$$

Calculando las diferencias divididas con cinco dígitos de precisión

x	$f[x]$				
0,1	0,70010	-2,9850	0,25000	1,0000	1,00000
0,2	0,40160	-2,9350	0,55000	1,4000	
0,3	0,10810	-2,8250	0,97000		
0,4	-0,17410	-2,6310			
0,5	-0,43750				

resulta el polinomio interpolador de Newton

$$p(x) = 0,70010 - 2,985(x-0,1) + 0,25(x-0,1)(x-0,2) \\ + (x-0,1)(x-0,2)(x-0,3) \\ + (x-0,1)(x-0,2)(x-0,3)(x-0,4) \\ = x^4 - 3x + 1.$$

Los valores de las derivadas en 0,3 son

$$p'(x) = 4x^3 - 3, \quad f'(0,3) \approx p'(0,3) = -2,8920, \\ p''(x) = 12x^2, \quad f''(0,3) \approx p''(0,3) = 1,0800.$$

Ambos valores están calculados con una precisión de cuarto orden y coinciden con los calculados por extrapolación de Richardson, también con cuarto orden de precisión.

- d) La fórmula de integración compuesta de Simpson es

$$\int_{x_0}^{x_N} = \frac{h}{6} \sum_{i=1}^N (f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i)),$$

y la podemos aplicar con $h = 0,2$, con lo que obtenemos

$$\int_{0,1}^{0,5} f(x) dx = \frac{0,2}{6} (0,70010 + 4 \cdot 0,40160 + 2 \cdot 0,10810 \\ - 4 \cdot 0,17440 - 0,43750) \\ = 0,046253.$$

- e) La manera más precisa que tenemos de calcular dicha raíz, utilizando sólo los datos del problema, es utilizar el polinomio interpolador y hacer

$$f(x_F) \approx p(x_F) = 0.$$

La ecuación cuártica $x^4 - 3x + 1 = 0$ la podemos resolver de forma exacta utilizando las fórmulas que aparecen en el enunciado de la novena relación de problemas, y obtenemos para las raíces

$$x_1 = 0,33767, \quad x_2 = 1,30749, \quad x_{3,4} = -0,82258 \pm 1,26032i.$$

También podemos utilizar un método numérico de punto fijo, sea

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{3}.$$

Este método converge en $I = [0,3, 0,4]$ ya que (1) existe punto fijo en I , (2) g está bien definida en I , (3) $g(I) \subset I$, ya que g es creciente en I y $g(0,4) < 0,4$, y (4) $|g'(I)| < 1$ ya que g' es creciente en I y $g'(0,4) \ll 1$. Además, la pequeñez de $g'(I)$ nos indica que el método convergerá bastante rápido. Iterando obtenemos

$$x_0 = 0,35, \quad x_1 = 0,33834, \quad x_2 = 0,33770, \quad x_3 = 0,33767 = x_4,$$

luego obtenemos $x_F \approx 0,33767$ con cinco dígitos de precisión.

- f) En el intervalo $[0,1, 0,5]$ podemos aproximar x_T por la expresión

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x) dx \approx \int_{0,1}^{x_T} p(x) dx = 0,1020,$$

es decir,

$$h(x_T) = -0,085002 + x_T - \frac{3x_T^2}{2} + \frac{x_T^5}{5} = 0,1020.$$

Sin embargo, esta ecuación no tiene solución en dicho intervalo, ya que la función $f(x)$ es positiva en $[0,1, x_F]$ y por tanto h crece en dicho intervalo hasta alcanzar un valor de

$$h(x_F) = 0,08251,$$

y entonces decrece en el intervalo $[x_F, 0,5]$ ya que f es negativa.

Si extrapolamos la función $p(x)$ fuera de su intervalo de validez, obtendremos una solución en $[1,5, 2]$ ya que h vuelve a crecer para $x > 1,30749$. Sin embargo, dicha solución no es válida para nuestro problema y, por tanto, no la calcularemos.

13. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x e^{-x^2} dx,$$

b)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx.$$

Solución. Aunque en un principio podemos pensar en utilizar fórmulas de Gauss-Hermite, el hecho de que el intervalo de integración sea semi-infinito no nos lo permite. Debemos usar fórmulas de Gauss-Laguerre que están definidas en $[0, \infty)$, y mediante el cambio de variable

$$z = x + 1, \quad dz = dx,$$

obtenemos

$$I(f) = \int_{-1}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} f(z-1) e^{-(z-1)^2} dz = \int_0^{\infty} g(z) e^{-z} dz = I(g),$$

donde

$$g(z) = f(z-1) e^{-(z-1)^2} e^z.$$

Las fórmulas de Gauss-Laguerre son de la forma

$$I(g) = \sum_{i=1}^4 w_i g(z_i),$$

donde z_i son los ceros de los polinomios de Laguerre. Los cinco primeros polinomios de Laguerre se pueden calcular por la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0,$$

y son

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2,$$

$$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3, \quad L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4.$$

Los cuatro ceros del quinto polinomio $L_4(x)$ se pueden calcular por el método presentado en el recetario de la relación novena y tienen el valor numérico

$$z_1 = 0,322548, \quad z_2 = 1,74576, \quad z_3 = 4,53662, \quad z_4 = 9,39507.$$

Los pesos de la regla de integración de Gauss-Laguerre se obtienen resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\int_0^\infty x^j e^{-x} dx = \sum_{i=1}^N w_i x_i^j,$$

y son

$$w_1 = 0,603154, \quad w_2 = 0,357419, \quad w_3 = 0,0388879, \quad w_4 = 0,000539295.$$

De esta forma obtenemos

a) Para

$$g(z) = (z - 1) e^{-(z-1)^2} e^z,$$

obtenemos

$$\int_{-1}^\infty x e^{-x^2} dx \approx \int_0^\infty g(z) e^{-z} dz = -0,286450,$$

que está bastante alejado del valor exacto

$$\int_{-1}^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2e} = 0,18394,$$

pero esto es de esperar porque hemos usado solamente cuatro puntos.

b) Para

$$g(z) = (z - 1)^4 e^{-(z-1)^2} e^z,$$

obtenemos

$$\int_{-1}^\infty x^4 e^{-x^2} dx \approx \int_0^\infty g(z) e^{-z} dz = 0,390614,$$

que está bastante alejado del valor exacto

$$\int_{-1}^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{-5}{4e} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} + \frac{3\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)}{8} = 0,764939,$$

pero esto es de esperar porque hemos usado solamente cuatro puntos.

14. Dada la siguiente tabla

x	0	1/4	1/2	3/4	1
$f(x)$	1	2	1	0	1

- a) Deduzca si hay inconsistencias o errores en ella. Justifique sus resultados
- b) Sin más información que la dada en la tabla, estime la pendiente de f en el punto $x = 1/2$, y justifique sus resultados, exactitud, etc.
- c) Sin más información que la dada en la tabla, estime

$$\int_0^1 f dx,$$

y justifique sus resultados, exactitud, etc.

- d) Suponga ahora que f es analítica. Estime las derivadas primera, segunda, tercera, cuarta y quinta de f (con respecto a x) en el punto $x = 1/2$. Justifique sus respuestas y los métodos utilizados para obtenerlas, además calcule los errores que crea haber cometido.
- e) Sin más información que la dada en la tabla, suponga que quiere aproximar la función f que no conoce por mínimos cuadrados. Es decir, quiere buscar unos polinomios ortogonales $p_j(x)$ tales que
- 1)

$$\sum_{i=1}^N p_j(x_i) p_k(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \neq k \leq M,$$

donde N es el número de puntos dado en la tabla cuyas coordenadas son x_i , y j y k son los grados de dichos polinomios. Estos polinomios aproximan la función f por mínimos cuadrados, es decir,

2)

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2,$$

es mínimo, donde $p(x)$ viene dado por

3)

$$p(x) = \sum_{j=0}^M a_j p_j(x).$$

¿Cuáles son los valores de a_j ? Calcule los cuatro primeros polinomios ortogonales teniendo en cuenta que se pueden escribir como

$$p_k(x) = x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

puesto que las constantes del monomio de mayor grado se pueden incluir en los a_j .

- f) Determine si hay alguna relación entre 14e1, 14e2 y 14e3 y la teoría de Sturm-Liouville. Asimismo, determine si hay alguna relación entre los coeficientes de a_j y la teoría de Sturm-Liouville. Justifique completamente sus resultados.
- g) En general, $p_j(x_i) \neq 0$ para los valores de x_i dados en la tabla, por lo que los polinomios del apartado 14e no son polinomios de Newton. ¿Qué representan pues estos polinomios? ¿Qué exactitud tienen? Justifique sus respuestas.

Solución.

- a) Sin conocer información adicional de la función f es imposible saber si hay inconsistencias o errores en la tabla. Supondremos que no los hay.
- b) Podemos utilizar varios procedimientos para calcular la derivada en el punto $x = 1/2$. Aquí utilizaremos la derivada del polinomio interpolante de la función. Calculando la siguiente tabla de diferencias divididas

x	$f[x]$				
0	1	4	-16	64/3	0
1/4	2	-4	0	64/3	
1/2	1	-4	16		
3/4	0	4			
1	1				

obtenemos el polinomio de Newton

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 4x - 16 \left(-\frac{1}{4} + x \right) x + \frac{64 \left(-\frac{1}{2} + x \right) \left(-\frac{1}{4} + x \right) x}{3} \\ &= 1 + \frac{32x}{3} - 32x^2 + \frac{64x^3}{3}, \end{aligned}$$

y su derivada

$$p'(x) = \frac{32 - 192x + 192x^2}{3}, \quad p'(1/2) = -\frac{16}{3}.$$

El error que hemos cometido en esta aproximación es de cuarto orden $O(h^4) = O(1/64)$.

Utilizando, por ejemplo, una fórmula centrada en diferencias finitas para la primera derivada y extrapolación de Richardson se puede obtener el mismo resultado con el mismo orden de precisión.

- c) Utilizando el polinomio interpolador calculado en el apartado anterior, obtenemos

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 p(x) dx = \left[x + \frac{16x^2}{3} - \frac{32x^3}{3} + \frac{16x^4}{3} \right]_0^1 = 1.$$

Este resultado tiene cuarto orden de precisión $O(h^4)$.

Si se utiliza la regla de Simpson se obtiene, también con cuarto orden de precisión, el mismo resultado.

- d) Podemos intentar estimar estas derivadas utilizando el polinomio interpolante obtenido en los apartados anteriores, dando

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{32 - 192x + 192x^2}{3}, & p'(1/2) &= -\frac{16}{3}, \\ p''(x) &= \frac{-192 + 384x}{3}, & p''(1/2) &= 0, \\ p'''(x) &= 128, & p'''(1/2) &= 128, \\ p^{(4)}(x) &= p^{(5)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que la función es analítica y además $f(0) = f(1)$ podemos suponerla periódica e interpolarla con un desarrollo en serie de Fourier, que nos da

$$s(x) = 1 + \sin(2\pi x),$$

y cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}
 s'(x) &= 2\pi \cos(2\pi x), & s'(1/2) &= -2\pi = -6,28319, \\
 s''(x) &= -4\pi^2 \sin(2\pi x), & s''(1/2) &= 0, \\
 s'''(x) &= -8\pi^3 \cos(2\pi x), & s'''(1/2) &= 8\pi^3 = 248,05, \\
 s^{(4)}(x) &= 16\pi^4 \sin(2\pi x), & s^{(4)}(1/2) &= 0, \\
 s^{(5)}(x) &= 32\pi^5 \cos(2\pi x), & s^{(5)}(1/2) &= -32\pi^5 = -9792,63.
 \end{aligned}$$

e) Sea el producto interior discreto y la norma

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^N f(x_i) g(x_i), \quad \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle, \quad (2)$$

y sean $p_k(x)$ un conjunto de $M+1$ polinomios ortogonales respecto a dicho producto interior, es decir,

$$\langle p_j(x), p_k(x) \rangle = \sum_{i=1}^N p_j(x_i) p_k(x_i) = 0, \quad j \neq k, \quad 0 \leq j, k \leq M.$$

Entonces los coeficientes a_j de la aproximación mínimo cuadrática que minimiza el error

$$E(f) = \left\| f(x) - \sum_{j=0}^M p_j(x_i) \right\|^2,$$

son un punto crítico o estacionario del error, es decir,

$$\frac{\partial E(f)}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^N 2 \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^M a_j p_j(x_i) \right) p_k(x_i) = 0,$$

luego

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i) p_k(x_i)}{\sum_{i=1}^N p_k^2(x_i)}.$$

Para calcular los primeros cuatro polinomios ortogonales respecto al producto interior discreto (2) aplicaremos la condición de

ortogonalidad. Operando, siguiendo la idea del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt,

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x + b_0,$$

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \sum_{i=1}^N p_0(x_i) p_1(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i + b_0 N = 0,$$

$$b_0 = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = -\frac{1}{2},$$

$$p_2(x) = (x - a_2) p_1 + b_2 p_0,$$

$$\langle p_0, p_2 \rangle = \langle p_0, x p_1 \rangle + \langle p_0, b_2 p_0 \rangle = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i p_1(x_i) = -\frac{1}{8},$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_1, x p_1 \rangle - \langle p_1, a_2 p_1 \rangle = 0, \quad a_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i p_1^2(x_i)}{\sum_{i=1}^N p_1^2(x_i)} = \frac{5/16}{5/8} = \frac{1}{2},$$

$$p_3(x) = (x - a_3) p_2 + b_3 p_1 + c_3 p_0,$$

$$\langle p_0, p_3 \rangle = \langle p_0, x p_2 \rangle + \langle p_0, c_3 p_0 \rangle = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i p_2(x_i) = 0,$$

$$\langle p_1, p_3 \rangle = \langle p_1, x p_2 \rangle + \langle p_1, b_3 p_1 \rangle = 0,$$

$$b_3 = -\frac{\sum_{i=1}^N x_i p_1(x_i) p_2(x_i)}{\sum_{i=1}^N p_1^2(x_i)} = -\frac{7/128}{5/8} = -\frac{7}{80},$$

$$\langle p_2, p_3 \rangle = \langle p_2, x p_2 \rangle - \langle p_2, a_3 p_2 \rangle = 0,$$

$$a_3 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i p_2^2(x_i)}{\sum_{i=1}^N p_2^2(x_i)} = \frac{7/256}{7/128} = \frac{1}{2},$$

es decir,

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x - \frac{1}{2}, \quad p_2 = x^2 - x + \frac{1}{8},$$

$$p_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{43}{80}x - \frac{3}{160}.$$

Ahora podemos calcular los valores de los coeficientes a_k ,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{64}{3},$$

y por tanto, el polinomio mínimo-cuadrático es

$$p(x) = p_0(x) - \frac{2}{3} p_1(x) + \frac{64}{3} p_3(x) = \frac{14}{15} + \frac{54x}{5} - 32x^2 + \frac{64x^3}{3}.$$

- f) Recordando que la teoría de aproximación de Sturm-Liouville nos permite aproximar

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^M \alpha_i \phi_i(x),$$

donde las funciones $\phi_j(x)$ son r -ortogonales entre sí,

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle_r = \int_a^b \phi_j(x) \phi_k(x) r(x) dx = 0, \quad j \neq k, \quad 0 \leq j, k \leq M,$$

y los coeficientes de la aproximación de Sturm-Liouville son

$$\alpha_j = \frac{\int_a^b r f \phi_j dx}{\int_a^b r \phi_j^2 dx}.$$

Existe una clara relación entre la teoría de Sturm-Liouville para funciones continuas y la teoría que hemos aplicado, que podemos denominar, teoría de Sturm-Liouville discreta, es decir, hemos sustituido integrales por sumatorios, de hecho, utilizando la regla de integración del rectángulo

$$\int_a^b f(x) \phi_j(x) dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^N f(x_i) \phi_j(x_i),$$

donde hemos utilizado como función peso $r(x) = 1$.

- g) Los polinomios del enunciado representan las aproximaciones mínimos cuadráticas o de Sturm-Liouville. Dado que la función peso $r = 1$ estos polinomios son exactos hasta cuarto orden, es decir, hasta polinomios de tercer grado.
15. Sean x_0, x_1, \dots, x_n distintos puntos reales que se quieren interpolar mediante la expresión

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{jx},$$

tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

donde las coordenadas y_i son conocidas.

- a) ¿Es el interpolante único? Demuestre su respuesta.
- b) ¿Cómo utilizaría dicho interpolante para determinar las derivadas de la función interpolada?
- c) ¿Cómo utilizaría dicho interpolante para determinar la integral definida entre x_0 y x_n de la función interpolada?

Solución.

- a) Definiendo $z = e^x$, o $x = \ln |z|$, tenemos

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j z^j = Q_n(z),$$

con lo que la condición de interpolación se escribe

$$A c = y,$$

donde A es de Vandermonde y su determinante

$$|A| = \prod_{i=0}^{n-1} (z_n - z_i),$$

no es nulo si todos los puntos son distintos entre sí, con lo que la solución del sistema lineal es única y por tanto el interpolante.

Hemos reducido el problema al de interpolación polinomial cuya existencia y unicidad es conocida.

- b) Para calcular las derivadas, derivamos el interpolante

$$P'_n(x) = \sum_{j=0}^n j c_j e^{jx}.$$

- c) Para calcular la integral, integramos el interpolante

$$\int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx = \sum_{j=0}^n \frac{c_j}{j} (e^{jx_n} - e^{jx_0}).$$