Novena relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 19 de Abril de 1999

Ejercicios de resolución numérica de problemas de valores iniciales de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL (brevario + recetario)

Dado un método numérico para la resolución de

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

se puede analizar su estabilidad lineal considerando la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\, y,$$

y obteniendo un polinomio característico que se puede escribir como

$$\rho(r) + h\, \lambda\, \sigma(r) = 0.$$

Un método numérico es <u>fuertemente estable</u> si todas las raíces de $\rho(r) = 0$ cumplen $|r_i| < 1$ excepto la raíz simple $r = 1$.

Un método numérico es <u>débilmente estable</u> si las raíces de su polinomio característico dependen del signo de λ.

Un método numérico es <u>absolutamente estable</u> para aquellos valores de $h\, \lambda$ para los cuales las raíces de su polinomio característico son tales que $|r_i| < 1$.

La raíz principal del polinomio característico es la que aproxima la solución de la ecuación diferencial ordinaria $(1 + h\, \lambda + O(h^2\, \lambda^2))$. Las raices restantes, si existen, se denomian raíces espurias y no convergen a soluciones de la ecuación diferencial.

Un método numérico es <u>relativamente estable</u> si el módulo de las raíces espurias de su polinomio característico es menor que el de la raíz principal.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0, \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\, a\, c}}{2\, a},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1\, x_2 = \frac{c}{a},$$

$$b^2 - 4\,a\,c \begin{cases} > 0 : 2 \text{ raíces reales} \\ = 0 : 1 \text{ raíz doble} \\ < 0 : 2 \text{ raíces complejas conjugadas} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CÚBICAS

$$x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0,$$

Sean

$$q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}, \qquad r = \frac{a_1\,a_2 - 3\,a_0}{6} - \frac{a_2^3}{27},$$

$$s_1 = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3}, \qquad s_2 = \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3},$$

entonces

$$x_1 = s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3}, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

$$x_2 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,(s_1 - s_2),$$

$$x_3 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,(s_1 - s_2),$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2, \qquad x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3 = a_1, \qquad x_1\,x_2\,x_3 = -a_0,$$

$$q^3 + r^2 \begin{cases} > 0 : 1 \text{ raíz real y 2 raíces complejas} \\ = 0 : 3 \text{ raíces reales al menos una de ellas doble} \\ < 0 : 3 \text{ raíces reales simples} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUÁRTICAS

$$x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0,$$

Calculamos la raíz real u_1 de la ecuación cúbica

$$u^3 - a_2\,u^2 + (a_1\,a_3 - 4\,a_0)\,u - (a_1^2 + a_0\,a_3^2 - 4\,a_0\,a_2) = 0,$$

y las cuatro raíces de las dos ecuaciones cuadráticas

$$\sigma^2 + \left(\frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + u_1 - a_2}\right)\sigma + \frac{u_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 - a_0} = 0,$$

donde, si todas las raíces de la ecuación cúbica son reales, debe elegirse u_1 de tal manera que todos los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas sean reales y se deben seleccionar los signos de tal manera que

$$x^4 + a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 = (x^2 + p_1\, x + q_1)\,(x^2 + p_2\, x + q_2)$$

con

$$p_1 + p_2 = a_3, \qquad p_1\, p_2 + q_1 + q_2 = a_2, \qquad p_1\, q_2 + p_2\, q_1 = a_1, \qquad q_1\, q_2 = 0,$$

Las raíces cumplen las relaciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_3, \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = a_0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -a_1.$$

EJERCICIOS DE LA RELACIÓN

1. Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

y un método predictor-corrector cuyo corrector es un Adams-Moulton de cuarto orden, es decir,

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\,\left(9\, f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19\, f(x_n, y_n) - 5\, f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad x_n = n\, h, \qquad y_n = y(x_n).$$

Describa cómo aplicaría dicho método y bajo qué condiciones converge.

2. Calcule el error de truncado del método de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(9\, f_{n+1} + 19\, f_n - 5\, f_{n-1} + f_{n-2}),$$

utilizado en el problema anterior.

3. Los operadores de diferencias finitas hacia adelante (forward) y hacia atrás (backward) se definen como

$$\Delta\, f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \nabla\, f(x) = f(x) - f(x-h),$$

donde $h > 0$. Calcule $\nabla\,\Delta\, f(x)$ y $\Delta\,\nabla\, f(x)$. ¿Cuál es la relación entre $\Delta\, f$, $\nabla\, f$ y $\nabla\,\Delta\, f$ y, f' y f''?

4. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector dado por

$$y^P_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4\,h}{3}\,(2\,f_n - f_{n-1} + 2\,f_{n-2}),$$
$$y_{n+1} = y^C_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\,(f(x_{n+1}, y^P_{n+1}) + 4\,f_n + f_{n-1}),$$

donde los superíndices P y C indican predictor y corrector, respectivamente. Determine el error local o de truncado de este método. Estudie la estabilidad de los métodos predictor y corrector, por separado. ¿Cuál es la estabilidad del método predictor-corrector en conjunto? NOTA: utilice los resultados que aparecen en el recetario adjunto.

5. Para el método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(55\,f_n - 59\,f_{n-1} + 37\,f_{n-2} - 9\,f_{n-3}),$$

(a) calcule el error de truncado, y (b) analice la estabilidad lineal de este método.

6. Calcule el orden de precisión y la estabilidad del método

$$y_{n+1} = 4\,y_n - 3\,y_{n-1} + 2\,h\,f_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

¿Cómo arrancaría dicho método? ¿Por qué?

7. Considere la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_n + c\,(y_{n-1} - y_{n-2}), \qquad n \geq 2, \quad 0 < c < 1,$$

donde y_0, y_1 e y_2 se conocen. Estudie el límite

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$

8. Determine el orden de exactitud y los errores de truncado del método

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n+1}) + \frac{h}{4}\left(4\,y'_{n+1} - y'_n + 3\,y'_{n-1}\right), \qquad n \geq 1,$$

y analice su estabilidad, consistencia y convergencia hacia la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$. ¿Necesita arranque dicho método? ¿Cómo lo arrancaría? Justifique sus respuestas.

9. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x, y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\,(y''_n - y''_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).$$

¿Cuál es el orden de exactitud y errores de truncado de este método? Analice la estabilidad de este método.

10. Considere el método

$$y_{n+1} = 2\,y_{n-1} - y_n + h\,\left(\frac{5}{2}\,f_n + \frac{1}{2}\,f_{n-1}\right).$$

Determine el error de truncado, la estabilidad, la consistencia y la convergencia de este método.