Novena relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 17 de Mayo de 1999

NOTAS SOBRE ESTABILIDAD:

Un método multipaso lineal (en diferencias finitas, de Adams, etc.) toma la forma

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} \alpha_j \, y_{n+j} = h \sum_{j=-m_1}^{m_2} \beta_j \, f_{n+j},$$

y para estudiar su estabilidad lineal, lo aplicamos a la ecuación lineal $y' = \lambda \, y$ ($f = \lambda \, y$), con lo que obtenemos una ecuación en diferencias finitas lineal (homogénea) cuya solución toma la forma $y_n = \sum \beta_i \, r_i^n$, donde r_i son las raíces de su polinomio característico o de estabilidad

$$p(r) = \rho(r) - h\lambda \, \sigma(r) = 0,$$

donde, con $m = \text{máx}\{n_1, m_1\}$, se tendrá que

$$\rho(r) = \sum_{j=m-n1}^{m+n_2} \alpha_j \, r^j, \qquad \sigma(r) = \sum_{j=m-m1}^{m+m_2} \beta_j \, r^j.$$

Este método numérico será consistente a la ecuación $y' = f$ si y sólo si

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=-n_1}^{n_2} j \, \alpha_j = \sum_{j=-m_1}^{m_2} \beta_j.$$

es decir, si y sólo si

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

De este forma, todo método consistente tiene la raíz 1 para $\rho(r)$, y una raíz $r_1 = 1 + h\lambda + O(h\lambda)$ para $p(r)$, que es una aproximación al desarrollo de Taylor de la exponencial $r_1 = \exp(h\lambda) + O(h^p \, \lambda^p)$, donde p es el orden de consistencia del método; a esta raíz r_1 se la denomina raíz principal. El resto de las raíces del polinomio característico serán llamadas raíces espúrias.

Un teorema de Dahlquist nos da las condiciones necesarias y suficientes para que un método multipaso lineal sea convergente, es decir, que sea consistente y que cumpla la condición de la raíz (0-estabilidad). La condición de la raíz o de 0-estabilidad se cumple si ninguna raíz de $\rho(r)$ tiene módulo mayor que la unidad y todas las raíces de módulo unidad son simples.

La condición de estabilidad fuerte se da si todas las raíces de $\rho(r)$ tiene módulo menor que la unidad excepto la raíz principal $r = 1$.

Un método multipaso lineal es absolutamente estable para aquellos valores de $h\lambda$ para los cuales las raíces de su polinomio característico son menores que la unidad. De hecho, todo método 0-estable y consistente es absolutamente inestable para $h\lambda$ pequeño y positivo.

Para $h\lambda$ positivo, la ecuación de estabilidad absoluta no es adecuada y se introduce la condición de estabilidad relativa. Un método es relativamente estable para aquellos valores de $h\lambda$ para los cuales las raíces espúrias son de menor módulo que la raíz principal.

Para analizar la estabilidad de un método, se puede utilizar el método del lugar de las raíces, que para $h\lambda$ real se reduce a calcular, por ejemplo, mediante Newton, y representar gráficamente las raíces del polinomio de estabilidad. Cuando el método numérico se aplica a sistemas de ecuaciones diferenciales, los valores de λ corresponden a los autovalores de la matriz de coeficientes, por lo que hay que representar el lugar de las raíces en el plano complejo $h\lambda$ (lo que se hace normalmente en Automática para el desarrollo de sistemas de control). En análisis numérico, lo usual es representar el diagrama de estabilidad que consiste en el contorno de la función $\max |r_i| = 1$ que representa la curva límite de estabilidad absoluta del método. Desde un punto de vista analítico podemos determinar la estabilidad utilizando desarrollos en serie de Taylor, para $|h\lambda| << 1$; si el método es consistente, podemos conocer la raíz principal hasta el orden de consistencia y hacer una deflación del polinomio de estabilidad, reduciéndolo un grado, lo que facilita bastante el análisis de estabilidad.

SOLUCIONES:

1. Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

y un método predictor-corrector cuyo corrector es un Adams-Moulton de cuarto orden, es decir,

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\,\left(9\,f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19\,f(x_n, y_n) - 5\,f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad x_n = n\,h, \qquad y_n = y(x_n).$$

Describa cómo aplicaría dicho método y bajo qué condiciones converge.

<u>Solución</u>. Nos encontramos ante un método predictor-corrector cuyo corrector es un Adams-Moulton (Adams implícito) de cuarto orden (C). Para aplicar dicho método tendremos que definir un método predictor (explícito) de al menos el mismo orden que al anterior (P). Lo usual es utilizar como predictor un Adams-Bashforth (Adams explícito) de cuarto orden. Denotando por E la evaluación de f en términos de valores conocidos de sus argumentos, podemos escribir la forma de proceder al aplicar un método iterativo de tipo predictor-corrector como $P(EC)^n$ en la que se aplica una vez el predictor y varias veces el corrector. Algunos autores también utilizan la forma $P(EC)^nE$ donde se realiza una evaluación adicional de la función antes del próximo paso de tiempo.

Procediendo de la forma $P(EC)^n$ obtenemos el algoritmo

a) Hacer $k = 1$ y calcular $y_{n+1}^{(0)}$ mediante el predictor de cuarto orden

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}\,(55\,f_n - 59\,f_{n-1} + 37\,f_{n-2} - 9\,f_{n-3}).$$

b) Calcular $f_{n+1}^{(k-1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}$.

c) Aplicar el k-ésimo corrector de cuarto orden

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\,(9\,f_{n+1}^{(k-1)} + 19\,f_n - 5\,f_{n-1} + f_{n-2}).$$

d) Aplicar la condición de convergencia; si no se cumple

$$\frac{|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}|}{|y_{n+1}^{(k)}}| < \epsilon,$$

repetir el paso (b); en caso contrario, $y_{n+1} = y_{n+1}^{(k)}$.

El método puede no converger, como cualquier método iterativo, si no se toma un h adecuado. El método presentado es un método de iteración funcional de Picard para ecuaciones en diferencias no lineales por lo que podremos aplicale el siguiente teorema de convergencia

<u>Teorema</u>. Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en x e y en $[a, b]$, el método predictor-corrector descrito convergerá si h es suficientemente pequeño

de tal forma que para $x = x_n$ y para todo y tal que $|y - y_{n+1}| \leq |y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}|$ se cumpla

$$\left| \frac{9\,h}{24}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1.$$

<u>Demostración</u>. En la expresión en diferencias del método corrector observamos que x_n es un valor fijo y que $y_{n+1}^{(k)} \equiv Y^{(k)}$ es variable, luego la expresión se puede escribir como la iteración funcional

$$Y^{(k)} = F(Y^{(k-1)}), \qquad F(Y) = \frac{9\,h}{24}\,f(x_{n+1}, Y) + C_n,$$

donde C_n es constante durante la iteración ya que depende solamente de x_n. Este método de iteración funcional de Picard convergerá (suponiendo que exista punto fijo, es decir, solución de la ecuación diferencial original) cuando se cumpla que

$$|F'(Y)| < 1, \qquad |Y - y_{n+1}| \leq |Y^{(0)} - y_{n+1}|,$$

donde y_{n+1} es el punto fijo de la iteración. Recuerde que el error $e^{(k)} = y_{n+1} - Y^{(k)}$ sigue la ecuación

$$Y^{(k)} = F(Y^{(k-1)}), \qquad y_{n+1} = F(y_{n+1}), \qquad |e^{(k)}| = |F'(y_{n+1})|^k\,|e^{(k)}|,$$

y que a $|F'(y_{n+1})|$ se le denomina constante asintótica del error de este método iterativo funcional de convergencia lineal.

En nuestro caso,

$$|F'(Y)| = \left| \frac{9\,h}{24}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1,$$

como se quería probar por lo que el paso deberá ser tan pequeño como

$$h < \frac{24}{9}\,\frac{1}{|\partial f/\partial y|}.$$

Nota: si este h es muy pequeño, los errores de redondeo pueden dominar a los de truncado e impedir que el método converja.

2. Calcule el error de truncado del método de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,\left(9\,f_{n+1} + 19\,f_n - 5\,f_{n-1} + f_{n-2}\right),$$

utilizado en el problema anterior.

Solución. El método de Adams implícito o de Adams-Moulton de cuarto orden utilizado en el problema anterior se deriva aproximando f en la ecuación integral

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\,dx = y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx,$$

por el polinomio de Newton de cuarto orden

$$\begin{aligned} p_4(x) = f(x_{n+1}) &+ f[x_{n+1}, x_n]\,(x - x_{n+1}) \\ &+ f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}]\,(x - x_{n+1})\,(x - x_n) \\ &+ f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]\,(x - x_{n+1})\,(x - x_n)\,(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

como se puede verificar fácilmente integrando. Procedamos a ello

$$(1) \qquad \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_{n+1})\,dx = h\,f_{n+1},$$

que nos permite obtener el método de Euler hacia atrás.

$$\begin{aligned} (2) \qquad \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x_{n+1}, x_n]\,(x - x_{n+1})\,dx &= \int_0^h f[x_{n+1}, x_n]\,(z - h)\,dz \\ = -\frac{h^2}{2}\,f[x_{n+1}, x_n] &= \frac{h}{2}\,(f_n - f_{n+1}), \end{aligned}$$

que sumando (1) y (2) nos permite obtener el método del trapecio.

$$\begin{aligned} (3) \qquad & \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}]\,(x - x_{n+1})\,(x - x_n)\,dx \\ &= \int_0^h f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}]\,z\,(z - h)\,dz \\ &= -\frac{h^3}{6}\,f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}] = \frac{h}{12}\,(2\,f_n - f_{n+1} - f_{n-1}), \end{aligned}$$

que sumando (1), (2) y (3) nos permite obtener el método de tercer orden

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}\,(5\,f_{n+1} + 8\,f_n - f_{n-1}).$$

Y, finalmente,

$$(4) \qquad \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]\,(x - x_{n+1})\,(x - x_n)\,(x - x_{n-1})\,dx$$

$$= -\frac{h^4}{4}\, f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$$

$$= \frac{h}{24}\,(-f_{n+1} + 3\,f_n - 3\,f_{n-1} + f_{n-2}),$$

que sumando (1), (2), (3) y (4) nos da el método de cuarto orden requerido

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(9\,f_{n+1} + 19\,f_n - 5\,f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Para obtener el error de truncado integraremos el error de interpolación del polinomio de Newton

$$e_4(x) = f(x) - p_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\prod_{j=1}^{-2}(x - x_{n+j}),$$

es decir,

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_4(x)\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} e_4(x)\,dx,$$

con lo que el error de aproximación es

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} e_4(x)\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\int_{x_n}^{x_{n+1}} \prod_{j=1}^{-2}(x - x_{n+j})$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\int_{x_n}^{x_{n+1}} (z - h)\,z\,(z + h)\,(z + 2\,h)\,dz$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\frac{19}{20}\,h^5.$$

Como en clases hemos definido el error de truncado en la forma

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) - T.E.T. \equiv \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{h}\,\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_4(x)\,dx,$$

en nuestro caso, los errores de truncado son

$$T.E.T. = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\frac{19}{20}\,h^4.$$

3. Los operadores de diferencias finitas hacia adelante (forward) y hacia atrás (backward) se definen como

$$\Delta\, f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \nabla\, f(x) = f(x) - f(x-h),$$

donde $h > 0$. Calcule $\nabla\,\Delta\, f(x)$ y $\Delta\,\nabla\, f(x)$. ¿Cuál es la relación entre $\Delta\, f$, $\nabla\, f$ y $\nabla\,\Delta\, f$ y, f' y f''?

Solución. Operando

$$\nabla\Delta f(x) = \nabla(f(x+h) - f(x)) = f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h),$$

$$\Delta\nabla f(x) = \Delta(f(x) - f(x-h)) = f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h).$$

Para obtener la relación entre los operadores en diferencias y las derivadas de la función aplicaremos Taylor,

$$f(x\pm h) = f(x) \pm f'(x)\,h + \frac{f''(x)}{2}\,h^2 \pm \frac{f'''(x)}{3!}\,h^3 + \frac{f''''(x)}{4!}\,h^4 + O\big(h^4\big)\,,$$

y sustituyendo

$$\Delta f = h\,f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2, \qquad x < \xi < x+h,$$

$$\nabla f = h\,f'(x) - \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2, \qquad x-h < \xi < x,$$

$$\Delta\nabla f(x) = \nabla\Delta f(x) = f''(x)\,h^2 + \frac{f''''(\xi)}{12}\,h^2, \qquad x-h < \xi < x+h.$$

4. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector dado por

$$y_{n+1}^P = y_{n-3} + \frac{4\,h}{3}\,(2\,f_n - f_{n-1} + 2\,f_{n-2}),$$

$$y_{n+1} = y_{n+1}^C = y_{n-1} + \frac{h}{3}\,(f(x_{n+1}, y_{n+1}^P) + 4\,f_n + f_{n-1}),$$

donde los superíndices P y C indican predictor y corrector, respectivamente. Determine el error local o de truncado de este método. Estudie la estabilidad de los métodos predictor y corrector, por separado. ¿Cuál es la estabilidad del método predictor-corrector en conjunto? NOTA: utilice los resultados que aparecen en el recetario adjunto.

Solución. Para determinar los términos del error de truncado de los dos métodos aplicaremos desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$y_{n+k} = y_n + k\,h\,y_n' + \frac{k^2\,h^2}{2}\,y_n'' + \frac{k^3\,h^3}{3!}\,y_n''' + \frac{k^4\,h^4}{4!}\,y_n^{(4)} + \frac{k^5\,h^5}{5!}\,y_n^{(5)} + O\Big(h^6\Big)\,,$$

$$f_{n+k} = y_n' + k\,h\,y_n'' + \frac{k^2\,h^2}{2}\,y_n''' + \frac{k^3\,h^3}{3!}\,y_n^{(4)} + \frac{k^4\,h^4}{4!}\,y_n^{(5)} + O\Big(h^5\Big)\,.$$

El error de truncado del predictor es

$$T.E.T. = y_{n+1} - y_{n-3} - \frac{4\,h}{3}\,(2\,f_n - f_{n-1} + 2\,f_{n-2}) = \frac{14\,h^5}{45}\,y^{(5)}(\xi),$$

con $\xi \in (x_{n-3}, x_{n+1})$ y el del corrector es

$$T.E.T. = y_{n+1} - y_{n-1} - \frac{h}{3}\,(f_n + 1 + 4\,f_n + f_{n-1}) = -\frac{h^5}{90}\,y^{(5)}(\xi),$$

con $\xi \in (x_{n-1}, x_{n+1})$. Por el signo del término de truncado observamos que el método corrector ha de ser mucho más estable que el predictor ya que su término principal de truncado es de tipo disipativo (pérdidas de energía) mientras que el del otro es anti-disipativo (adición de energía).

Para estudiar la estabilidad lineal de un método en diferencias, se sustituye la función no lineal por $f(x,y) = \lambda\,y$ y se estudia la estabilidad de la ecuación en diferencias finitas lineal resultante. Para el predictor obtenemos

$$y_{n+1} - y_{n-3} = \frac{4\,h\lambda}{3}\,(2\,y_n - y_{n-1} + 2\,y_{n-2}),$$

cuya solución toma la forma $y_n = \beta\,r^n$, lo que nos da ecuación característica

$$r^4 - 1 - \frac{4}{3}\,h\lambda\,(2\,r^3 - r^2 + 2\,r) \equiv p(r) = \rho(r) + h\lambda\,\sigma(r) = 0.$$

Los ceros de $\rho(r) = 0$ son $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, por lo que el método no es fuertemente estable. Al no ser fuertemente estable el método, tampoco será absolutamente estable, como podemos ver en las raíces de $p(r)$, obtenidas operando utilizando las fórmulas del recetario que se adjunta y aproximando para $0 < h\lambda << 1$,

$$r_1 = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

$$r_2 = -1 + \frac{5}{3}\,h\lambda - \frac{25}{18}\,(h\lambda)^2 + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

y

$$r_3 = \overline{r_4} = \mathrm{i} + \frac{\mathrm{i}}{3}\,h\lambda + \left(\frac{4}{9} + \frac{\mathrm{i}}{18}\right)\,(h\lambda)^2 + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

con módulo

$$|r_3| = |r_4| = 1 + \frac{h\lambda}{3} - \frac{(h\lambda)^2}{18} + O\Big((h\lambda)^3\Big).$$

La raíz principal es r_1 y las demás son espúrias. El método no es relativamente estable ya que $|r_2| > |r_1|$ para $h\lambda < 0$. El método es débilmente estable ya que para $h\lambda > 0$, las raíces espúrias son de módulo menor que la principal. De hecho éste método sólo convergerá para $h\lambda > 0$.

Para estudiar la estabilidad lineal del método corrector obtenemos su polinomio característico o de estabilidad

$$p(r) = \rho(r) + h\lambda\,\sigma(r) = r^2 - 1 - \frac{h\lambda}{3}(r^2 + 4\,r + 1).$$

Las raíces $\{1, -1\}$ de $\rho(r)$ indican que es 0-estable, es decir, convergente, pero que no es fuertemente estable. Las raíces del polinomio característico son

$$r_\pm = \frac{2\,h\lambda \pm \sqrt{3}\,\sqrt{3 + (h\lambda)^2}}{3 - h\lambda},$$

que desarrollando en serie de Taylor

$$r_+ = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

$$r_- = -1 + \frac{h\lambda}{3} - \frac{(h\lambda)^2}{18} + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

nos indican que el método no es absolutamente estable, es relativamente estable para $h\lambda > 0$ y, por tanto, débilmente estable.

La estabilidad del método predictor-corrector conjunto (PEC) se analiza introduciendo el método predictor en la ecuación del corrector para $f = \lambda\, y$,

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h\lambda}{3} \left(y_{n-3} + \frac{4\, h\lambda}{3}\, (2\, y_n - y_{n-1} + 2\, y_{n-2}) + 4\, y_n + y_{n-1} \right),$$

cuyo polinomio de estabilidad es

$$\begin{aligned} p(r) &= \rho(r) + h\lambda\, \sigma(r) + (h\lambda)^2\, \tau(r) \\ &= r^4 - r^2 - \frac{h\lambda}{3}(r^3 + 4\, r^2 + 1) - \frac{4\, (h\lambda)^2}{9}(2\, r^3 - r^2 + 2\, r). \end{aligned}$$

Las raíces de $\rho(r)$ son $\{1, -1, 0, 0\}$ por lo que este método es 0-estable (y convergente) pero no es fuertemente estable.

Para obtener las soluciones del polinomio característico hemos de calcular las raíces de una ecuación de cuarto grado. Operando aplicando reiteradamente desarrollos en serie Taylor para $h\lambda$ pequeño obtenemos

$$r_1 = -1 + 1{,}444\, h\lambda - 0{,}4012\, (h\lambda)^2 +$$

$$r_2 = \overline{r_3} = 0{,}5773\mathrm{i}\, (h\lambda)^{1/2} - 0{,}4444\, h\lambda - 0{,}2352\mathrm{i}\, (h\lambda)^{3/2} + 0{,}6173\, (h\lambda)^2$$

$$r_4 = 1 + 1{,}667\, h\lambda - 0{,}8333\, (h\lambda)^2$$

El método no es absolutamente estable ya que para $h\lambda < 0$, $r_1 > 1$. La raíz principal r_4 es de módulo mayor que las demás, luego es relativamente estable para $h\lambda > 0$ y, por tanto, débilmente estable.

La estabilidad de un método predictor-corrector $P(EC)^n$ es igual de fácil de analizar, basta sustituir reiteradamente el corrector en sí mismo. Como el polinomio de estabilidad tiene un grado mucho mayor, se requieren representaciones gráficas y métodos numéricos.

5. Para el método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\, (55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37\, f_{n-2} - 9\, f_{n-3}),$$

(a) calcule el error de truncado, y (b) analice la estabilidad lineal de este método.

Solución. Se trata de un método de Adams explícito o Adams-Bashforth, y aplicando desarrollo en serie de Taylor, como en el problema anterior, obtenemos para el error de truncado

$$T.E.T. = \frac{251}{720}\, h^5\, y^{(6)}(\xi), \qquad x_{n-3} < \xi < x_{n+1}.$$

El polinomio característico de este método es

$$p(r) = r^4 - r^3 - \frac{h\lambda}{24}\,(55\, r^3 - 59\, r^2 + 37\, r - 9),$$

lo que indica que el método es fuertemente estable, luego es débilmente estable. Dividiendo este polinomio de estabilidad entre su raíz principal, ya que el método es consistente,

$$r - \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right),$$

obtenemos

$$r^3 + h\lambda\,\left(-\frac{3}{8} + \frac{7\,r}{6} - \frac{31\,r^2}{24}\right) + (h\lambda)^2\,\left(\frac{3}{8} - \frac{19\,r}{24} + \frac{r^2}{2}\right) + O\Big((h\lambda)^3\Big),$$

con un resto $O((h\lambda)^3)$, cuyas raíces son

$$\begin{aligned} r_1 = {} & 0{,}7211\,(h\lambda)^{1/3} - 0{,}5393\,(h\lambda)^{2/3} + 0{,}4306\, h\lambda - 0{,}4618\,(h\lambda)^{4/3} \\ & + 0{,}2776\,(h\lambda)^{5/3} + O\Big((h\lambda)^2\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |r_2| = |r_3| = {} & 0{,}7211\,(h\lambda)^{1/3} + 0{,}2696\,(h\lambda)^{2/3} - 0{,}0640\, h\lambda \\ & - 0{,}2769\,(h\lambda)^{4/3} - 0{,}08228\,(h\lambda)^{5/3} + O\Big((h\lambda)^2\Big). \end{aligned}$$

El método es absolutamente estable para $h\lambda$ pequeño y negativo, hasta que la raíz r_1 alcanza el círculo unidad en -1,

$$\rho(-1) + h\lambda\,\sigma(-1) = 0, \qquad h\lambda = -0'3,$$

es decir, para $-0'3 < h\lambda < 0$. Para $h\lambda > 0$ el método es relativamente estable ya que la única raíz de módulo mayor que la unidad es la principal, luego el método es relativamente estable y débilmente estable.

6. Calcule el orden de precisión y la estabilidad del método

$$y_{n+1} = 4\,y_n - 3\,y_{n-1} + 2\,h\,f_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

¿Cómo arrancaría dicho método? ¿Por qué?

Solución. El orden de precisión (consistencia) de este método se calcula fácilmente aplicando Taylor a y_{n+k} y a $f_{n+k} = y'_{n+k}$ en la expresión

$$\frac{y_{n+1} - 4\,y_n + 3\,y_{n-1}}{2\,h} = f_{n-1},$$

que nos da como términos de truncado

$$y'_n = f_n + T.E.T. = f_n + \frac{k^2}{3}\,y''' + O\Big(k^3\Big)\,,$$

con lo que el método tiene segundo orden de consistencia.

La estabilidad lineal de este método se estudia mediante su polinomio característico,

$$p(r) = \rho(r) + h\lambda\,\sigma(r) = r^2 - 4\,r + 3 + 2\,h\lambda.$$

Las raíces de $\rho(r)$ son $\{1, 3\}$, con lo que el método no es fuertemente estable. Las raíces de $p(r)$ son

$$r = 2 \pm \sqrt{1 - 2\,h\lambda} = 2 \pm (1 - h\lambda + O\Big((h\lambda)^2\Big)),$$

es decir, la raíz principal r_- y la raíz espúria

$$r_+ = 3 - h\lambda + O\Big((h\lambda)^2\Big)\,,$$

luego el método no es absolutamente estable. Tampoco es un método relativamente estable para $h\lambda > 0$. Este método tampoco es débilmente estable ya que sus raíces dependen del signo de $h\lambda$ pero no es estable para ningún signo de ellas.

Estamos ante un método explícito de 3 pasos que requiere conocer dos valores iniciales (físicamente sólo tenemos uno). Para arrancar dicho método debemos utilizar un método explícito de 2 pasos que tenga, al menos, el mismo orden de precisión (consistencia), es decir, de segundo orden. Por ejemplo, podemos usar el siguiente método de Runge-Kutta de segundo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h\,f(x_n, y_n))).$$

7. Considere la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_n + c\,(y_{n-1} - y_{n-2}), \qquad n \geq 2, \quad 0 < c < 1,$$

donde y_0, y_1 e y_2 se conocen. Estudie el límite

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$

Solución. La solución de esta ecuación en diferencias toma la forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{3} C_i\, r_i^n,$$

donde r_i son raíces de su polinomio característico

$$p(r) = r^3 - r^2 - c(r-1) = (r-1)\,(r^2 - c),$$

cuyas raíces son $\{1, \sqrt{c}, -\sqrt{c}\}$, por lo que la solución general será

$$y_n = C_1 + (C_2 + C_3\,(-1)^n)\,(\sqrt{c})^n.$$

El límite solicitado es

$$\lim_{n\to\infty} y_n = C_1,$$

si $|\sqrt{c}| < 1$, es decir, si $0 \leq |c| < 1$. En otro caso, el límite no existe (oscila entre infinito y menos infinito).

Para completar el ejercicio, vamos a calcular los valores de las constantes de integración en función de los datos iniciales

$$C_1 = \frac{c\,y_0 - y_2}{c-1},$$

$$C_2 = \frac{(1+\sqrt{c})\,y_2 + (c-1)\,y_1 - (c+\sqrt{c})\,y_2}{2\,(c-1)\,\sqrt{c}},$$

$$C_3 = -\frac{(1-\sqrt{c})\,y_2 + (c-1)\,y_1 - (c-\sqrt{c})\,y_2}{2\,(c-1)\,\sqrt{c}}.$$

Nota: $C_1 = 0$ si $c = y_2/y_0$.

8. Determine el orden de exactitud y los errores de truncado del método

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n+1}) + \frac{h}{4}\left(4\,y'_{n+1} - y'_n + 3\,y'_{n-1}\right), \qquad n \geq 1,$$

y analice su estabilidad, consistencia y convergencia hacia la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$. ¿Necesita arranque dicho método? ¿Cómo lo arrancaría? Justifique sus respuestas.

Solución. Desarrollando en serie de Taylor este método obtenemos

$$y'_n = 3\,f_n + \frac{19}{12}\,h^2\,y''' + O\!\left(h^3\right),$$

es decir, que este método no es consistente a la ecuación diferencial $y' = f$. Para que sea consistente podemos hacer el siguiente cambio en el método

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n+1}) + \frac{h}{4}\left(4\,y'_{n+1} - 5y'_n + 3\,y'_{n-1}\right), \qquad n \geq 1,$$

con lo que el método tiene los errores de truncado

$$y'_n = f_n + T.E.T. = f_n + \frac{19}{12}\,h^2\,y''' + O\!\left(h^3\right).$$

El polinomio de estabilidad de este método es

$$p(r) = r^2 - \frac{r + r^2}{2} - \frac{h\lambda}{4}\,(4\,r^2 - 5\,r + 3),$$

con raíces $\{-1/3, 0\}$ de $\rho(r)$, es decir, que es fuertemente estable, y con raíces

$$r_\pm = \frac{-2 + 5\,h\lambda \pm \sqrt{4 + 4\,h\lambda - 23\,h\lambda^2}}{-4 + 8\,h\lambda},$$

es decir, cuya raíz principal es r_- y cuya raíz espúria es

$$r_+ = \frac{-3\,h\lambda}{2} - \frac{3\,h\lambda^2}{2} + OL(h\lambda)^3.$$

Este método es absolutamente estable para $h\lambda < 0$, además, dibujando el módulo de las raíces se observa que el método es relativamente estable para $0 < h\lambda < 4$, con lo que también es débilmente estable.

Este método es convergente por el teorema de Dalhquist (cumple la condición de la raíz); de hecho, es fuertemente estable.

Para arrancar este método implícito de 3 pasos se puede utilizar un método de Runge-Kutta de tercer orden o un método de Adams explícito. Asímismo, también se podría utilizar una filosofía de tipo predictor-corrector.

9. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x, y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\,(y''_n - y''_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).$$

¿Cuál es el orden de exactitud y errores de truncado de este método? Analice la estabilidad de este método.

Solución. Desarrollando en Serie de Taylor

$$y_{n+k} = y_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{2}\,y''_n + \frac{h^3}{3!}\,y'''_n + O\Big(h^4\Big)\,,$$

$$y'_{n+k} = f_n + h\,y''_n + \frac{h^2}{2}\,y'''_n + \frac{h^3}{3!}\,y^{(4)}_n + O\Big(h^4\Big)\,,$$

$$y''_{n+k} = y''_n + h\,y'''_n + \frac{h^2}{2}\,y^{(4)}_n + \frac{h^3}{3!}\,y^{(5)}_n + O\Big(h^4\Big)\,,$$

y sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$y'_n = f_n + T.E.T. = f_n - \frac{h^4}{720}\,y^{(5)}_n,$$

con lo que el método es de cuarto orden de precisión.

Para estudiar la estabilidad lineal de este método lo aplicaremos a la ecuación $y' = \lambda y$,

$$\left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}\right)\,y_{n+1} = \left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}\right)\,y_n,$$

cuya solución es del tipo $y_n = C\, r^n$ con

$$r = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}}{1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} + \frac{(h\lambda)^5}{144} + O\Big((h\lambda)^6\Big).$$

Este método es fuertemente estable, ya que

$$\lim_{h\lambda\to 0} r = 1,$$

es absolutamente estable para $h\lambda < 0$ y, como no tiene raíces espúrias, relativamente estable para todo $h\lambda$ y, por tanto, también débilmente estable.

10. Considere el método

$$y_{n+1} = 2\, y_{n-1} - y_n + h\,\left(\frac{5}{2}\, f_n + \frac{1}{2}\, f_{n-1}\right).$$

Determine el error de truncado, la estabilidad, la consistencia y la convergencia de este método.

Solución. Sustituyendo serie de Taylor obtenemos

$$y_n' = f_n - \frac{h^2}{12}\, y_n''' + O\Big(h^3\Big),$$

con lo que el método es de segundo orden de consistencia.

El polinomio de estabilidad de este método es

$$p(r) = r^2 + r - 2 - \frac{h\lambda}{2}\,(5r+1),$$

cuyas raíces son

$$r_\pm = \frac{-2 + 5\, h\lambda \pm \sqrt{36 - 12\, h\lambda + 25\, h\lambda^2}}{4},$$

siendo r_+ la raíz principal y

$$r_- = -2 + \frac{3\, h\lambda}{2} - \frac{(h\lambda)^2}{2} - \frac{(h\lambda)^3}{12} + O\Big((h\lambda)^4\Big),$$

es decir, este método no es fuertemente estable, no es absolutamente estable, es relativamente estable para $h\lambda > 0{,}4$ y es débilmente estable en dicho caso.

Al no cumplir la condición de la raíz, este método no es convergente en el sentido $h \to 0$. Sin embargo, para $h\lambda > 0{,}4$ el método es convergente en el sentido $n \to \infty$.