Onceava relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 17 de Mayo de 1999

Ejercicios sobre problemas de valores propios.

1. En el método de la potencia escribimos

$$x^{(k)} = A^k \, x^{(0)} = \lambda_1^k \, (u^{(1)} + \epsilon^{(k)}),$$

donde λ_1 es el autovalor de A de mayor módulo, $u^{(1)}$ es su autovector asociado y $\epsilon^{(k)}$ es el vector de errores. Para determinar el autovalor podemos calcular el tamaño de los vectores $x^{(k)}$ mediante un funcional $\phi(x)$ lineal (por ejemplo, una norma o alguna de las componentes). De esta forma podemos escribir los cocientes

$$r_k = \frac{\phi(x^{(k+1)})}{\phi(x^{(k)})} = \lambda_1 \, \frac{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k+1)})}{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k)})},$$

que tienden a λ_1 cuando $k \to \infty$. Demuestre que los errores relativos cumplen con

$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \, c_k,$$

donde los números c_k forman una sucesión convergente (y por tanto acotada).

2. Demuestre que $r_{k+1} - \lambda_1 = (c + \delta_k) \, (r_k - \lambda_1)$, donde $|c| < 1$ y $\delta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Es decir, demuestre que la iteración r_k converge linealmente a λ_1.

3. Cómo aplicaría el método de aceleración de Aitken al método de la potencia para acelerar la convergencia de r_k.

4. Si el método de la potencia se aplica a una matriz real con un vector inicial también real, ¿qué sucederá si el valor propio dominante es complejo? ¿Se puede aplicar el método en dicho caso?

5. Una manera rápida de aplicar el método de la potencia es trabajar sólo con potencias de dos, es decir,

$$x^{(k)} = A^{2^k} \, x^{(0)}, \quad A^{2^k} = A^{2^{k-1}} \, A^{2^{k-1}}.$$

Adapte el método de la potencia para trabajar en este caso. El método de los cuadrados es más económico para iteraciones grandes. ¿Cómo evitará el desbordamiento en este método?.

6. Aproxime el radio espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mediante dos iteraciones del método de la potencia y utilizando la norma infinito para ϕ. Como vector inicial tome $(1, 1, 1)^\top$.

7. Para la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

dibuje (aproximadamente) los discos de Gershgorin y encuentre una cota para su radio espectral. ¿Cómo determinaría una cota superior y otra inferior para el radio espectral de una matriz utilizando su norma 1? Aplique su respuesta a la matriz del enunciado.

8. Calcule la factorización QR de Householder de la matriz

$$\begin{pmatrix} 63 & 41 & -88 \\ 42 & 60 & 51 \\ 0 & -28 & 56 \\ 126 & 82 & -71 \end{pmatrix}.$$

9. Calcule la forma superior de Hessenberg de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Aplique el algoritmo QR de Francis con desplazamiento para calcular los autovalores de la matriz de Hessenberg que ha obtenido en el ejercicio anterior.