Primera relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 10 de Octubre de 1999

Demostrar los siguientes teoremas como repaso de Cálculo:

1. **Teorema de Bolzano**. Dada $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$; si $f(\alpha) \le \gamma \le f(\beta)$ con $\alpha, \beta \in [a,b]$, entonces $\exists\, \xi$ tal que $\gamma = f(\xi)$ con $\xi \in [a,b]$.

2. **Teorema**. Si $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$, y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ y $g_1, g_2, \ldots, g_n$ son números reales del mismo signo, entonces
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g_i = f(\xi) \sum_{i=1}^{n} g_i, \qquad \xi \in [a,b].$$

3. **Teorema del valor medio**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$ y $g(x)$ sea o positiva estricta o negativa estricta e integrable en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx, \qquad \xi \in [a,b].$$

4. **Teorema**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$ y $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces $f(x)$ alcanza su máximo y mínimo en $[a,b]$, es decir, $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$ tales que
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta).$$

5. **Teorema de Rolle**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$, $[a,b]$ acotado y $f'(x) \in \mathrm{C}^0(a,b)$. Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces $\exists\, \xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

6. **Teorema**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$, $[a,b]$ acotado y $f'(x) \in \mathrm{C}^0(a,b)$. Entonces $\exists\, \xi$ tal que
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \xi \in (a,b)$$

7. **Teorema del resto (integral) de Taylor**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^{n+1}[a,b]$ y $c \in [a,b]$. Entonces
$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_{n+1}(x)$$
donde
$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-s)^n\, f^{(n+1)}(s)\, ds.$$

8. **Teorema**. Sea $f(x, y, \ldots, z) \in \mathrm{C}^1$, $x = x(t), y = y(t), \ldots \in \mathrm{C}^1$ y

$$g(t) = f(x(t), y(t), \ldots, z(t)),$$

entonces

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z} z'.$$

9. **Teorema**. Sea $f(x, y) \in \mathrm{C}^2$ en un entorno del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe (ξ, η) en un entorno de (a, b) tal que

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b) + R_2(x, y)$$

donde

$$R_2 = f_{xx}(\xi, \eta) \frac{(x - a)^2}{2} + f_{xy}(\xi, \eta)\,(x - a)\,(x - b) + f_{yy}(\xi, \eta) \frac{(y - b)^2}{2}.$$

10. **Teorema fundamental del álgebra**. Sea un polinomio $p(x) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n$, $n \geq 1$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$. Entonces $p(x)$ tiene por lo menos un cero ξ tal que $p(\xi) = 0$.

11. **Lema**. Sean $z_1, z_2, \ldots z_k$ ceros del polinomio $p(x)$ entonces

$$p(x) = (x - z_1)\,(x - z_2)\,\ldots\,(x - z_k)\,r(x),$$

(en esta expresión se deben contar las multiplicidades de los ceros).

12. **Lema**. Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado $\leq k$ que coinciden en los puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots z_k$, es decir, tales que $r(x) = p(x) - q(x)$ tiene estos puntos como ceros. Entonces $p(x) \equiv q(x)$.

13. **Teorema**. Dada la función real $f(x)$ y los puntos $x_0, x_1, \ldots x_n$ que son distintos, existe un único polinomio de grado $\leq n$ que interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots x_n$, es decir, que tiene el mismo valor en dichos puntos.

14. **Teorema**. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^0(a, b]$. Entonces el problema diferencial

$$\begin{cases} u'(x) = f(x), & a < x \leq b \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

tiene como solución única

$$u(x) = u_0 + \int_a^x f(y)\,dy, \qquad a \leq x \leq b.$$

Notese que este teorema es válido si $f(x)$ es continua a trozos.