Tercera relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Octubre de 1999

Realizar los siguientes ejercicios relativos al Tema 3 de la asignatura.

1. Se define la traza de la matriz cuadrada A como la suma de los elementos de su diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios. Ayuda: el teorema de Schur le puede ser útil.

2. Dada una matriz cuadrada A demuestre que
$$|\mathrm{tr}(A)| \le n\,\rho(A).$$
Si, además, A es hermitiana (o simétrica) y definida positiva
$$\mathrm{tr}(A) \ge \rho(A).$$

3. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

    a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty$,
    b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$,
    c) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_2$.

    Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

4. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$. Ayuda: utilice la forma canónica de Jordan.

5. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

    a) $\|A\,U\|_2 = \|U\,A\|_2 = \|A\|_2$, con A del mismo tamaño que U.
    b) $\|U\,x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n$,
    c) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U\,x$ y $U\,y$,
    d) $\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$,
    e) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

6. Dada la matriz A hermitiana. Demuestre que sus autovalores son reales y sus autovectores ortogonales. Además demuestre que A es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

7. Defina
$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$
¿Es invariante respecto a transformaciones de semejanza? ¿Cómo se calcula la exponencial de una matriz utilizando su forma canónica de Jordan? ¿Qué ventajas tiene? Ayuda: los bloques de Jordan son suma de una matriz diagonal y otra nilpotente.

8. Considere la ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \qquad y'(0) = y(1) = 0.$$
Calcule los autovalores y autovectores/autofunciones de esta ecuación. ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Discretice el espacio x de tal manera que haya $(N+1)$ puntos espaciados en $1/N$; es decir, llamando $\Delta x = 1/N$, $x_i = (i-1)\,\Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$. Aproximemos la segunda derivada por la fórmula en diferencias
$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O\Big(\Delta^4\Big)\,,$$
donde $x_i = i\,\Delta x$ y $y_i \approx y(x_i)$ y de tal manera que la ecuación de partida evaluada en el punto x_i venga dada por
$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda\, y_i = 0,$$
o lo que es lo mismo
$$y_{i+1} + (w-2)\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, N,$$
donde $w = \lambda\,\Delta x^2$, y $y_1 = y_{N+1} = 0$. Definiendo $\Lambda = w - 2$, tenemos
$$y_{i+1} + \Lambda\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} = y_{N+1} = 0.$$
¿Cuáles son los autovalores Λ de esta sistema de ecuaciones? ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Para los casos $N = 2$ y $N = 3$ calcule los autovalores Λ y relaciónelos con los λ de la ecuación diferencial ordinaria. ¿Cuál es esa relación? ¿Por qué? ¿Qué es lo que se ha perdido/ganado en la discretización?