Tercera relación de problemas
Profesor Francisco R. Villatoro

Técnicas Numéricas
15 de Noviembre de 1999

SOLUCIONES

Soluciones de los ejercicios de la tercera relación de problemas.

1. Se define la traza de la matriz cuadrada A como la suma de los elementos de su diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios. Ayuda: el teorema de Schur le puede ser útil.

   Solución. Sabemos que A tiene forma normal de Schur, es decir, que existe una matriz U unitaria tal que

   $$T = U^{-1}\,A\,U,$$

   es una matriz triangular cuya diagonal está formada por los autovalores de A (demuéstrelo). Además, como

   $$\begin{aligned}\mathrm{tr}(U^{-1}\,A\,U) &= \sum_i \sum_l \sum_k (u^{-1})_{il}\,a_{lk}\,u_{ki} = \sum_l \sum_k a_{lk} \left(\sum_i u_{ki}\,(u^{-1})_{il} \right) \\ &= \sum_l \sum_k a_{lk} (U\,U^{-1})_{kl} = \sum_l \sum_k a_{lk} \delta_{kl} = \sum_k a_{kk} = \mathrm{tr}(A),\end{aligned}$$

   por lo que

   $$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \sum_k \lambda_{Ak}.$$

2. Dada una matriz cuadrada A demuestre que

   $$|\mathrm{tr}(A)| \le n\,\rho(A).$$

   Si, además, A es hermitiana (o simétrica) y definida positiva

   $$\mathrm{tr}(A) \ge \rho(A).$$

   Solución. Aplicando el resultado del ejercicio anterior (repitalo sin demostrar el teorema de Schur),

   $$|\mathrm{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \le \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \le n\, \max_i |\lambda_i| \le n\,\rho(A).$$

Por un lado, para A hermitiana (en $\mathbb{C}$) o simétrica (en $\mathbb{R}$), sus autovalores son reales (demuéstrelo). Por otro lado, si A es definida positiva estos autovalores son positivos (demuéstrelo). Finalmente, como una suma de números positivos es siempre mayor que el mayor de los sumandos

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i \lambda_i \geq \max_i \lambda_i = \rho(A).$$

3. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

    a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$,
    b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$,
    c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_2$.

    Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

    Solución.

    a) Como

    $$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \leq n\,\|x\|_\infty,$$

    donde se ha usado que $|x_i|/\|x\|_\infty \leq 1$, tenemos que las normas infinito y uno son equivalentes

    $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty.$$

    b) Ya que

    $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\|x\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2}{\|x\|_\infty^2}},$$

    por lo mismo que antes

    $$\sqrt{\|x\|_\infty^2} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty^2\, n},$$

    y tenemos que las normas infinito y euclídea son equivalentes

    $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

c) De los apartados (a) y (b) se sigue que

$$\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2,$$

y las normas son equivalentes. Por otro lado, como por (a)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_\infty \|x\|_1 \leq \|x\|_1^2,$$

obtenemos

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_2.$$

4. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$.

Solución. El teorema de Cayley-Hamilton dice que si $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz A,

$$p(x) = |A - x\, I| = b_0 + b_1\, x + \cdots + b_m\, x^m,$$

entonces se cumple que

$$p(A) = b_0\, I + b_1\, A + \cdots + b_m\, A^m = 0.$$

Si la forma canónica de Jordan de A es diagonal, es decir,

$$P^{-1}\, A\, P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Como $A^n = P\, \Lambda^n\, P^{-1}$ (demuéstrelo) entonces $p(A) = P\, p(\Lambda)\, P^{-1}$ (demuéstrelo), y como el término entre paréntesis es nulo porque $p(\lambda_i) = 0$, se sigue el resultado $p(A) = 0$.

En general, sea J la forma canónica de Jordan de A, es decir, existe una matriz P no singular tal que $A = P^{-1}\, J\, P$ siendo J una matriz diagonal por bloques de Jordan,

$$J = \mathrm{diag}\, [J(\lambda_1, n_1^{(1)}), \ldots, J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)})]$$

(escriba la forma del bloque $J(\lambda_k, n_r^{(k)})$). Entonces, es fácil comprobar que

$$p(A) = P\, p(J)\, P^{-1} = P \operatorname{diag}\left[p(J(\lambda_1, n_1^{(1)})), \ldots, p(J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)}))\right] P^{-1}.$$

Ahora bien, un bloque de Jordan $J(\lambda, n)$ tiene como polinomio característico

$$|J(\lambda, n) - \mu\, I| = (\mu - \lambda)^n,$$

(demuéstrelo) por lo que por lo que λ tiene multiplicidad algebraica $m_a = n$. Sin embargo, el rango de $J(\lambda, n) - \mu\, I$ es $n-1$, por lo que la multiplicidad geométrica de λ es $m_g = n - (n-1) = 1$, y por lo tanto existe un sólo autovector e_1 como base para el autoespacio de λ,

$$L(\lambda) = \{x \,:\, (J(\lambda, n) - \lambda\, I)\, x = 0\} = \{x \,:\, x = \alpha\, e_1, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Sean $\{e_i\}$ con $i = 2, 3, \ldots, n$los $n-1$ los vectores principales asociados a λ, es decir, vectores dados por

$$(J(\lambda, n) - \lambda\, I)\, e_i = e_{i-1}, \qquad i = n, n-1, \ldots, 2,$$

y como sabemos que $(J(\lambda, n) - \lambda\, I)\, e_1 = 0$, haciendo, formalmente $e_k = 0$ para $k \leq 0$, podemos escribir $\forall i, j \geq 1$,

$$(J(\lambda, n) - \lambda\, I)^i\, e_j = e_{j-i},$$

y por tanto

$$(J(\lambda, n) - \lambda\, I)^n = 0, \qquad (J(\lambda, n) - \lambda\, I)^{n-1} \neq 0.$$

Entonces, aplicando este resultado a los bloques de Jordan de J,

$$p(J(\lambda_i, n_j^{(i)})) = (J(\lambda_i, n_j^{(i)}) - \lambda\, I)^{n_{mai}^{(i)}}\, q(\lambda) = 0,$$

donde sabemos que $m_{ai} \geq m_{gi}$ y $q(\lambda)$ es un polinomio de grado $n - n_{mai}^{(i)}$. Con ello hemos demostrado el teorema de Cayley-Hamilton (justifíquelo en detalle).

5. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

   a) $\|A\,U\|_2 = \|U\,A\|_2 = \|A\|_2$, con A del mismo tamaño que U.

b) $\|U\,x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n,$

c) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U\,x$ y $U\,y$,

d) $\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n,$

e) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

<u>Solución</u>.

a) Escriba la definición de norma matricial subordinada y de matriz unitaria. Como U es unitaria resulta que

$$\|U\,A\,x\|_2^2 = \langle U\,A\,x, U\,A\,x\rangle = \langle A\,x, U^*\,U\,A\,x\rangle = \|A\,x\|_2^2$$

y por tanto

$$\|U\,A\|_2 = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|U\,A\,x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|A\,x\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2.$$

b) Haciendo $y = U\,x$, tenemos que $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$ (demuéstrelo) por lo que

$$\|A\,U\|_2 = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|A\,U\,x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|y\|\neq 0} \frac{\|A\,y\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2.$$

c) La distancia entre x e y es $\|x - y\|_2$, por lo que

$$\|U\,x - U\,y\|_2 = \|U\,(x - y)\|_2 = \|x - y\|_2,$$

d) $\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, U^*\,U\,y\rangle = \langle x, y\rangle$.

e) Sea $U\,u_i = \lambda_i\,u_i$, entonces

$$\langle u_i, u_i\rangle = \langle U\,u_i, U\,u_i\rangle = \langle \lambda_i\,u_i, \lambda_i\,u_i\rangle = |\lambda_i|^2\,\langle u_i, u_i\rangle,$$

con lo que $|\lambda_i| = 1$.

Los autovectores de una matriz unitaria son linealmente independientes y definen una base ortonormal (demuéstrelo), por lo que todo vector se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle\,u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,u_i,$$

y por tanto

$$\langle U\,x, U\,x\rangle = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

6. Dada la matriz A hermitiana que es definida positiva, es decir, $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle A\,x, x\rangle > 0$. Demuestre que A es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

Solución. Sea $A\,u_i = \lambda_i\,u_i$. Sabemos que los autovalores de una matriz hermitiana son números reales (demuéstrelo). Entonces de la definición de matriz definida positiva aplicada a un autovector

$$\langle A\,u_i, u_i\rangle = \lambda_i\,\langle u_i, u_i\rangle > 0$$

obtenemos $\lambda_i > 0$, ya que $\langle u_i, u_i\rangle > 0$.

Por otro lado, si A es hermitiana entonces sus autovectores definen una base (demuestre que son linealmente independientes) ortonormal (demuéstrelo), sea $\{u_i\}$; por tanto, $\forall x$,

$$x = \sum_i \alpha_i\,u_i,$$

por lo que si los autovalores de A son positivos

$$\begin{aligned}\langle A\,x, x\rangle &= \langle A\,\sum_i \alpha_i\,u_i, \sum_i \alpha_i\,u_i\rangle = \langle \sum_i \lambda_i\,\alpha_i\,u_i, \sum_i \alpha_i\,u_i\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle \lambda_i\,\alpha_i\,u_i, \alpha_j\,u_j\rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i\,\overline{\alpha_i}\,\alpha_j\,\langle u_i, u_j\rangle \\ &= \sum_i \lambda_i\,|\alpha_i|^2 > 0\end{aligned}$$

por ser una suma de números positivos. Luego A es definida positiva.

7. Defina
$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

¿Es invariante respecto a transformaciones de semejanza? ¿Cómo se calcula la exponencial de una matriz utilizando su forma canónica de Jordan? ¿Qué ventajas tiene? Ayuda: los bloques de Jordan son suma de una matriz diagonal y otra nilpotente.

Solución. Como A es semejante a B si existe P no singular tal que $A = P^{-1}\,B\,P$, entonces (demuéstrelo por inducción)

$$A^m = (P^{-1}\,B\,P)^m = P^{-1}\,B^m\,P,$$

luego

$$
\begin{aligned}
e^{A} = e^{P^{-1}\,B\,P} &= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1}\,B\,P)^m}{m!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1}\,B^m\,P)}{m!} \\
&= P^{-1}\left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right) P = P^{-1}\,e^{B}\,P.
\end{aligned}
$$

Por un lado, si la forma canónica de Jordan de A es diagonal, entonces existe P no singular tal que $A = P^{-1}\,\Lambda\,P$ con $(\Lambda)_i = \lambda_i$ autovalor de A. En ese caso calculamos fácilmente

$$
e^{A} = P^{-1}\,e^{\Lambda}\,P, \qquad (e^{\Lambda})_i = e^{\lambda}_i.
$$

En general, sea J la forma canónica de Jordan de A, es decir, existe una matriz P no singular tal que $A = P^{-1}\,J\,P$, luego $e^{A} = P^{-1}\,e^{J}\,P$, siendo J una matriz diagonal por bloques de Jordan,

$$
J = \mathrm{diag}\,[J(\lambda_1, n_1^{(1)}), \ldots, J(\lambda_1, n_{m_{g1}}^{(1)}), \ldots, J(\lambda_k, n_1^{(k)}), \ldots, J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)})]
$$

donde cada bloque se escribe

$$
J(\lambda_k, n_r^{(k)}) = \lambda_k\, I_{n_r^{(k)}} + N_{n_r^{(k)}},
$$

(detalle su forma) donde $N_{n_r^{(k)}}$ es $n_r^{(k)}$-nilpotente, $(N_{n_r^{(k)}})^{n_r^{(k)}} = 0$. Entonces, es fácil comprobar que

$$
\exp(J) = \mathrm{diag}\,[\exp(J(\lambda_1, n_1^{(1)})), \ldots, \exp(J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)}))].
$$

Si A y B son matrices que conmutan, $\exp(AB) = \exp(A)\exp(B)$ (demuéstrelo) y como una matriz diagonal conmuta con cualquier otra, entonces

$$
\begin{aligned}
\exp(J(\lambda_k, n_r^{(k)})) &= e^{\lambda_k}\, \exp(N_{n_r^{(k)}}) = e^{\lambda_k} \left(I + \sum_{i=1}^{n_r^{(k)}} \frac{N^i_{n_r^{(k)}}}{i!} \right) \\
&= e^{\lambda_k} \begin{pmatrix}
1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n_r^{(k)}-1)!} & \frac{1}{(n_r^{(k)})!} \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_r^{(k)}-2)!} & \frac{1}{(n_r^{(k)}-1)!} \\
0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n_r^{(k)}-3)!} & \frac{1}{(n_r^{(k)}-2)!} \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

NOTA: Escriba la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $y' = A\,y$, $y(0) = y_0$, donde $y(t) \in \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. (REPASO DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS)

8. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \qquad y'(0) = y(1) = 0.$$

Calcule los autovalores y autovectores/autofunciones de esta ecuación. ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Discreticemos el espacio x de tal manera que haya $(N+1)$ puntos espaciados en $1/N$; es decir, llamando $\Delta x = 1/N$,

$$x_i = \frac{i-1}{N} = (i-1)\,\Delta x, \qquad i = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Aproximemos la segunda derivada por la fórmula en diferencias

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O\Big(\Delta x^2\Big),$$

donde $x_i = i\,\Delta x$ y $y_i \approx y(x_i)$ y de tal manera que la ecuación de partida evaluada en el punto x_i venga dada por

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda\, y_i = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$y_{i+1} + (w-2)\,y_i + y_{i-1} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, N,$$

donde $w = \lambda\,\Delta x^2$, y $(y_2 - y_1)/\Delta x = y_{N+1} = 0$. Definiendo $\Lambda = w - 2$, tenemos

$$y_{i+1} + \Lambda\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} = y_{N+1} = 0.$$

¿Cuáles son los autovalores Λ de esta sistema de ecuaciones? ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Para los casos $N = 2$ y $N = 3$ calcule los autovalores Λ y relaciónelos con los λ de la ecuación diferencial ordinaria. ¿Cuál es esa relación? ¿Por qué? ¿Qué es lo que se ha perdido/ganado en la discretización?

Solución. La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \qquad y'(0) = y(1) = 0,$$

tiene como única solución $y(x) = 0$ (demuéstralo), por tanto, no se puede interpretar como un problema de autovalores. Si tomamos como condiciones iniciales $y'(0) = y'(1) = 0$ también $y(x) = 0$ (demuéstralo). Por ello, consideraremos el problema con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas $y(0) = y(1) = 0$.

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

se puede interpretar como un problema de autovalores haciendo la analogía

$$A\, y + \lambda\, y = 0, \qquad \mathcal{A}(D)\, y + \lambda\, y = 0,$$

con $\mathcal{A}(D) = D^2$. Para $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$ la solución de esta ecuación diferencial toma la forma

$$y(x) = A\, \sin(k\, x) + B\, \cos(k\, x),$$

y como

$$y'' = -A\, k^2\, \sin(k\, x) - B\, k^2\, \cos(k\, x) = -k^2\, y(x),$$

entonces $k^2 = \lambda$, y aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = B = 0, \qquad y(1) = A\, \sin(k) = 0,$$

$$k \equiv k_n = \pi\, n, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

con lo que las autofunciones serán no nulas para los autovalores del espectro discreto $\lambda_n = \pi^2\, n^2$, e iguales a

$$y_n(x) = A\, sin(\pi\, n\, x), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Por otro lado, para $\mathbb{R} \ni \lambda < 0$ la solución de la ecuación diferencial toma la forma

$$y(x) = A\, e^{k\, x} + B\, e^{-k\, x},$$

con $k = \sqrt{-\lambda}$, y aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = A + B = 0, \qquad y(1) = A\, e^{k} + B\, e^{-k} = 0,$$

obtenemos $A = B = 0$ e $y(x) \equiv 0$. Luego no hay espectro continuo.

Hemos encontrado que el espectro de esta ecuación diferencial se reduce a su espectro discreto y que existe un número infinito (numerable) de autovalores λ_n.

La ecuación en diferencias finitas (para condiciones de Dirichlet)

$$y_{i+1} + \Lambda\, y_i + y_{i-1} = 0, \qquad y_1 = y_{N+1} = 0.$$

se puede interpretar como un problema de autovalores haciendo la analogía

$$\mathcal{A}(E)\, y + \Lambda\, y = 0, \qquad \mathcal{A}(E) = E + E^{-1},$$

donde $E\, y_i = y_{i+1}$ y $E^{-1}\, y_i = y_{i-1}$. Para determinar los autovalores habrá que determinar la solución que cumple con las condiciones de contorno. La solución de esta ecuación en diferencias se puede escribir como

$$y_i = A\, \xi_+^i + B\, \xi_-^i = A\, \cos(i-1)\, \xi + B\, \sin(i-1)\, \xi,$$

que aplicando las condiciones de contorno

$$y_1 = A = 0, \qquad y_{N+1} = B\, \sin N\, \xi = 0,$$

se obtiene la familia de soluciones

$$y_i^{(n)} = B\, \sin(i-1)\, \xi_n, \qquad \xi_n = \frac{n\, \pi}{N}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Para determinar los valores de Λ (autovalores) para los que cada función de esta familia es realmente una solución (autofunción) habrá que hacer

$$\sin i\, \xi + \Lambda\, \sin(i-1)\, \xi + \sin(i-2)\, \xi = 0,$$

Recurriendo a un manual de fórmulas y tablas matemáticas sabemos que

$$\sin n\, A = \sin A \left((2\, \cos A)^{n-1} - \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} (2\, \cos A)^{n-3} \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} (2\, \cos A)^{n-5} - \cdots \right),$$

(fórmula 5,61 del manual de M.R. Spiegel, Serie Schaum), por lo que

$$\begin{aligned}
&\sin n\,A + \sin(n-2)\,A \\
&\qquad = \sin A\,\left((2\,\cos A)^{n-1} - \left(\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\right)(2\,\cos A)^{n-3}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)(2\,\cos A)^{n-5} - \cdots\right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Lambda\,\sin(n-1)\,A = \Lambda\,\sin A\,&\left((2\,\cos A)^{n-2} - \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix}(2\,\cos A)^{n-4}\right. \\
&\left. + \begin{pmatrix} n-4 \\ 2 \end{pmatrix}(2\,\cos A)^{n-6} - \cdots\right);
\end{aligned}$$

observando que

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\right) = \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\left(\begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} n-4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \ldots,
\end{aligned}$$

obtenemos que $\sin n\,A + \sin(n-2)\,A + \Lambda\,\sin(n-1)\,A = 0$, con $\Lambda = -2\,\cos A$, y los $N-1$ autovalores de la ecuación en diferencias finitas son

$$\Lambda_n = -2\,\cos\xi_n, \qquad \xi_n = \frac{n\,\pi}{N}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

La relación entre los autovalores continuos λ_n y los discretos

$$\Lambda_n = w_n - 2 = \tilde{\lambda}_n\,\Delta\,x^2 - 2 = -2\,\cos n\,\pi\,\Delta\,x,$$

es (aplicando Taylor para $\Delta\,x \ll 1$)

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_n &= \frac{1}{\Delta\,x^2}\,(2 - 2\cos n\,\pi\,\Delta\,x) \\
&= n^2\,\pi^2 - \frac{n^4\,\pi^4}{12}\,\Delta\,x^2 + O\Big(\Delta\,x^4\Big) \\
&= \lambda_n - \frac{\lambda_n^2}{12}\,\Delta\,x^2 + O\Big(\lambda_n^3\,\Delta\,x^4\Big),
\end{aligned}$$

y los autovalores del problema en diferencias finitas son una aproximación cuadrática para los primeros $N-1$ autovalores del problema continuo.