Cuarta relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 9 de Noviembre de 1999

Métodos Directos para Problemas Algebraicos Lineales.

1. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante (estrictamente) por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Demuestre que A es invertible, es decir, existe su inversa A^{-1}.

2. Dado el sistema lineal, $Ax = b$, dado por

$$1{,}02\, x + 0{,}99\, y = 2{,}01, \qquad 0{,}99\, x + 1{,}01\, y = 2{,}02.$$

Calcula, y comenta los resultados,

a) La solución exacta del problema

b) La solución usando solamente dos cifras decimales y redondeo

c) La solución usando solamente dos cifras decimales y truncado

d) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y redondeo

e) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y truncado

f) El número de condición de A para el apartado ($2d$).

g) El número de condición de A para el apartado ($2e$).

h) El residuo y el error absoluto obtenidos en ($2d$).

i) El residuo y el error absoluto obtenidos en ($2e$).

3. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 3, \end{aligned}$$

con el método de eliminación de Gauss, y calcule las matrices de permutación que le sean necesarias. Explique lo que hace y por qué lo hace. Resuelva dicho sistema por el método de factorización LU.

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con aritmética de cuatro dígitos (mantisa de 4 dígitos decimales),

$$0{,}1410 \times 10^{-2}\, x + 0{,}4004 \times 10^{-1}\, y = 0{,}1142 \times 10^{-1},$$
$$0{,}2000 \times 10^{0}\, x + 0{,}4912 \times 10^{1}\, y = 0{,}1428 \times 10^{1},$$

por medio de los siguientes métodos:

a) regla de Cramer,

b) eliminación de Gauss y en el orden en que se dan las ecuaciones,

c) eliminación de Gauss e intercambiando el orden de las ecuaciones,

d) eliminación de Gauss con pivotaje completo.

Explique sus resultados y calcule el número de condición de la matriz de coeficientes. ¿Es esta matriz simétrica?, ¿y definida positiva? ¿Cuáles son su determinante, sus autovalores y sus autovectores?

5. Calcule la solución exacta de $A\,x = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6384 & 0{,}8065 \\ 0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0{,}8319 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix}.$$

Calcule el vector x_c tal que $r = A\,x_c - b$ es exactamente igual a

$$b = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{8} \end{pmatrix}.$$

Calcule el número de condición de A usando norma infinito. Si el ordenador representa b exactamente (sin error), calcule el error relativo de A tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Si el ordenador no comete error al representar A, calcule el error relativo de b tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Repita los resultados anteriores en norma 1.

6. Una matriz de Hilbert $H^n = (h_{ij}^n)$ tiene como elementos

$$h_{ij}^n = \frac{1}{i+j-1}, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

¿Es simétrica y definida positiva? Si lo es, aplica la descomposición de Cholesky LL^T a la matriz H^4. A partir de ella calcula la descomposición modificada de Cholesky LDL^T.

7. Dada la matriz A dominante por filas

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

con $\|A\|_\infty < \infty$, donde la norma infinito es

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   a) ¿Cuál es el mayor valor posible de $\|A\|_\infty$?
   b) Para ese valor, ¿cuál es la solución del sistema $Ax = 0$? ¿Por qué?
   c) ¿Cuál es el menor valor posible de $\|A\|_\infty$?
   d) Para ese valor, ¿cuál es la solución de $Ax = b$, si $b \neq 0$? ¿Por qué?
   e) Para cualquier otro valor de $\|A\|_\infty$, cuál es la solución de $Ax = 0$? ¿Por qué?

8. Si $A = U^T U$ donde U es una matriz triangular superior con autovalores no nulos de multiplicidad geométrica igual a su multiplicidad algebraica, demuestre

   a) que A es simétrica y definida positiva,
   b) que A tiene inversa,
   c) la relación entre los autovalores de A y U,
   d) la relación entre los autovectores de A y U,
   e) la relación entre los autoespacios de A y U.

9. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz

$$A = I - 2\, w\, w^{*T}.$$

   a) ¿A es simétrica?, ¿es hermítica?.
   b) ¿Cómo son sus autovalores? Demuéstrelo.
   c) ¿Cómo son sus autovectores? Demuéstrelo.
   d) ¿Cómo son sus filas? y, ¿columnas?
   e) Escribe su forma normal de Schur.

f) ¿Se puede aplicar el método de Cholesky?, ¿por qué?

10. Para resolver el problema de condiciones de contorno

$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad y(x_l) = y_l, \quad y(x_r) = y_r,$$

donde a, b, y_l e y_r son constantes, se pueden usar diferencias finitas de la siguiente forma. Se define una malla $\{x_i\}$,

$$x_i = x_0 + hi, \qquad h = \frac{x_r - x_l}{n}, \qquad x_r = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_l,$$

se aproxima $y(x_i) \approx y_i$ y se aproximan las derivadas

$$y'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

dando lugar a la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + b\,y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax = b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

Sea el problema de valores iniciales periódico

$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad \frac{d^n y(x_l)}{dx^n} = \frac{d^n y(x_r)}{dx^n}.$$

Aplique un método en diferencias finitas a este problema como el anteriormente descrito. ¿Qué ecuación en diferencias obtiene? Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax = b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).