Cuarta relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 13 de Diciembre de 1999

SOLUCIONES

1. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante (estrictamente) por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Demuestre que A es invertible, es decir, existe su inversa A^{-1}.

Solución. Para una matriz diagonalmente dominante por filas

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \left(|a_{ii}| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right) < 2 \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|.$$

Además $a_{ii} \neq 0$, por lo que

$$A = D\,B, \qquad D = (d_{ii}) = (a_{ii}),$$

donde D tiene inversa, y

$$b_{ii} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y para $1 \leq i \neq j \leq n$,

$$d_{ii}\, b_{ij} = a_{ij}, \qquad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_{ii}}.$$

Ahora vamos a demostrar que la matriz $I - B$ es invertible. Ya que

$$\|I - B\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij} - b_{ij}|,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, y

$$\|I - B\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 = \frac{1}{\|I^{-1}\|_\infty},$$

por lo cual B es invertible (demuestralo) y como también lo es D, A tiene como inversa

$$A^{-1} = D^{-1}\, B^{-1}.$$

2. Dado el sistema lineal, $Ax = b$, dado por

$$1{,}02\, x + 0{,}99\, y = 2{,}01, \qquad 0{,}99\, x + 1{,}01\, y = 2{,}02.$$

Calcula, y comenta los resultados,

a) La solución exacta del problema

b) La solución usando solamente dos cifras decimales y redondeo

c) La solución usando solamente dos cifras decimales y truncado

d) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y redondeo

e) La inversa A^{-1} con dos cifras decimales y truncado

f) El número de condición de A para el apartado ($2d$).

g) El número de condición de A para el apartado ($2e$).

h) El residuo y el error absoluto obtenidos en ($2d$).

i) El residuo y el error absoluto obtenidos en ($2e$).

Solución.

a) La solución exacta es

$$x_e = \frac{101}{167} = 0{,}60479, \qquad y_e = \frac{235}{167} = 1{,}4072,$$

b) Operando por sustitución

$$x = \frac{2{,}01 - 0{,}99\, y}{1{,}02} = 1{,}97 - 0{,}97\, y,$$

$$\begin{aligned} 0{,}99\, x + 1{,}01\, y &= 0{,}99\, (1{,}97 - 0{,}97\, y) + 1{,}01\, y \\ &= 1{,}95 - 0{,}96\, y + 1{,}01\, y = 1{,}95 + 0{,}05\, y = 2{,}02, \end{aligned}$$

con lo que

$$y = \frac{0{,}07}{0{,}05} = 1{,}4, \qquad x = 1{,}97 - 0{,}97\, y = 1{,}97 - 1{,}36 = 0{,}61.$$

c) Operando por sustitución

$$x = \frac{2{,}01 - 0{,}99\, y}{1{,}02} = 1{,}97 - 0{,}97\, y,$$

$$\begin{aligned} 0{,}99\, x + 1{,}01\, y &= 0{,}99\,(1{,}97 - 0{,}97\, y) + 1{,}01\, y \\ &= 1{,}95 - 0{,}96\, y + 1{,}01\, y = 1{,}95 + 0{,}05\, y = 2{,}02, \end{aligned}$$

con lo que

$$y = \frac{0{,}07}{0{,}05} = 1{,}4, \qquad x = 1{,}97 - 0{,}97\, y = 1{,}97 - 1{,}35 = 0{,}62.$$

d) El determinante es

$$|A| = 1{,}02 \times 1{,}01 - 0{,}99 \times 0{,}99 = 1{,}03 - 0{,}98 = 0{,}05,$$

y la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1{,}01 & -0{,}99 \\ -0{,}99 & 1{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20{,}2 & -19{,}8 \\ -19{,}8 & 20{,}4 \end{pmatrix}.$$

e) El mismo resultado.

f)

$$\operatorname{cond}(A) = \kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2{,}01 \times 0{,}6 = 1{,}206.$$

g) El mismo resultado.

h)

$$\operatorname{Res}(A) = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Err}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x_e}| = 0{,}01.$$

i) El residuo y el error absoluto obtenidos en (2*e*).

$$\operatorname{Res}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Err}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x_e}| = 0{,}02.$$

3. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x+2y+3z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \\ 2x+y+2z &= 3, \end{aligned}$$

con el método de eliminación de Gauss, y calcule las matrices de permutación que le sean necesarias. Explique lo que hace y por qué lo hace. Resuelva dicho sistema por el método de factorización LU.

Solución. Premultiplicando A por

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

e introduciendo la matriz de permutación P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P \cdot P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix},$$

con lo que obtenemos finalmente el sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$, donde $A = P \cdot P_1 \cdot A$ y

$$\tilde{b} = P \cdot P_1 \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema triangular superior obtenido,

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

La factorización LU requiere una matriz de permutación, y operando, se llega a $P \cdot A = L \cdot U$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y resolviendo el sistema $L \cdot U \cdot x = P \cdot b$ se obtiene la solución anterior .

NOTA: en el examen explique más en detalle tanto el método de Gauss como la factorización LU.

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con aritmética de cuatro dígitos (mantisa de 4 dígitos decimales),

$$0{,}1410 \times 10^{-2}\, x + 0{,}4004 \times 10^{-1}\, y = 0{,}1142 \times 10^{-1},$$
$$0{,}2000 \times 10^{0}\, x + 0{,}4912 \times 10^{1}\, y = 0{,}1428 \times 10^{1},$$

por medio de los siguientes métodos:

a) regla de Cramer,

b) eliminación de Gauss y en el orden en que se dan las ecuaciones,

c) eliminación de Gauss e intercambiando el orden de las ecuaciones,

d) eliminación de Gauss con pivotaje completo.

Explique sus resultados y calcule el número de condición de la matriz de coeficientes. ¿Es esta matriz simétrica?, ¿y definida positiva? ¿Cuáles son su determinante, sus autovalores y sus autovectores?

Solución. Es fácil obtener la solución exacta de este sistema: x=1, y=0.25.

a) Aplicando la regla de Cramer, determinamos el determinante del sistema

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 0{,}6926 \times 10^{-2} - 0{,}8008 \times 10^{-2} \\ &= -0{,}1082 \times 10^{-2},\end{aligned}$$

y las dos soluciones

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{|A|} = \frac{0{,}5610 \times 10^{-1} - 0{,}5712 \times 10^{-1}}{-1{,}082 \times 10^{-2}} \\ &= \frac{-0{,}1020 \times 10^{-2}}{-1{,}082 \times 10^{-2}} = 0{,}9427 \times 10^{0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{|A|} = \frac{0{,}2013 \times 10^{-2} - 0{,}2284 \times 10^{-2}}{-1{,}082 \times 10^{-2}} \\ &= \frac{-0{,}2710 \times 10^{-3}}{-1{,}082 \times 10^{-2}} = 0{,}2505 \times 10^{0}.\end{aligned}$$

b) Aplicando eliminación de Gauss en el orden dado, obtenemos como primer (y único) multiplicador

$$m = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 0{,}7050 \times 10^{-2},$$

y para la segunda ecuación

$$\begin{aligned}
(m\,a_{22} - a_{12})\,y &= (m\,b_2 - b_1),\\
(0{,}3463 \times 10^{-1} - 0{,}4004 \times 10^{-1})\,y &= 0{,}1007 \times 10^{-1} - 0{,}1142 \times 10^{-1}\\
-0{,}5410 \times 10^{-2}\,y &= -0{,}1350 \times 10^{-2}\\
y &= 0{,}2495\,10^{0},
\end{aligned}$$

con lo que despejando la otra variable

$$\begin{aligned}
x &= \frac{b_1 - a_{12}\,y}{a_{11}} = \frac{0{,}1142 \times 10^{-1} - 0{,}9990 \times 10^{-2}}{a_{11}}\\
&= \frac{0{,}1430 \times 10^{-2}}{0{,}1410 \times 10^{-2}} = 0{,}1014 \times 10^{1}.
\end{aligned}$$

c) Aplicando eliminación de Gauss intercambiando las ecuaciones, obtenemos como primer (y único) multiplicador

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0{,}4072 \times 10^{-1},$$

y para la segunda (antes la primera) ecuación

$$\begin{aligned}
(m\,a_{12} - a_{22})\,y &= (m\,b_1 - b_2),\\
0{,}7657 \times 10^{0}\,y &= 0{,}1910 \times 10^{0}\\
y &= 0{,}2494\,10^{0},
\end{aligned}$$

con lo que despejando la otra variable

$$x = \frac{b_2 - a_{22}\,y}{a_{22}} = \frac{0{,}2029 \times 10^{0}}{0{,}2000 \times 10^{0}} = 0{,}1015 \times 10^{1}.$$

d) Aplicando eliminación de Gauss con pivotaje completo tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned}
&0{,}4912 \times 10^{1}\,y + 0{,}2000 \times 10^{0}\,x = 0{,}1428 \times 10^{1},\\
&0{,}4004 \times 10^{-1}\,y + 0{,}1410 \times 10^{-2}\,x = 0{,}1142 \times 10^{-1},
\end{aligned}$$

por lo que obtenemos como primer (y único) multiplicador

$$m = \frac{0{,}4912 \times 10^1}{0{,}4004 \times 10^{-1}} = 0{,}1227 \times 10^3,$$

y para la segunda (antes la primera) ecuación

$$\begin{aligned} (m\,0{,}1410 \times 10^{-2} - 0{,}2000 \times 10^0)\,x &= (m\,0{,}1142 \times 10^{-1} - 0{,}1428 \times 10^1) \\ -0{,}2699 \times 10^-1\,x &= -0{,}2677 \times 10^-1 \\ x &= 0{,}9918\,10^0, \end{aligned}$$

con lo que despejando la otra variable

$$\begin{aligned} 0{,}4912 \times 10^1\,y &= 0{,}1428 \times 10^1 - 0{,}2\,x \\ 0{,}4912 \times 10^1\,y &= 0{,}1230 \times 10^1 \\ y &= 0{,}2504 \times 10^0. \end{aligned}$$

e) El determinante de la matriz de coeficientes A es

$$|A| = -0{,}00108208 = -0{,}108208 \times 10^-2,$$

y su polinomio característico es

$$|A - \lambda\,I| = -0{,}00108208 - 4{,}91341\,\lambda + \lambda^2,$$

cuyas raíces son $\lambda \in \{4{,}91363, -0{,}00022022\}$ y sus autovectores

$$v \in \{(-0{,}00815083, -0{,}999967)^\top, (-0{,}999172, 0{,}0406811)^\top\},$$

respectivamente. Como el determinante de la matriz es muy pequeño y sus autovalores son de tamaño muy diferente, es de esperar que esta matriz esté mal condicionada. Esta matriz son es simétrica, obviamente, y tampoco es definida positiva porque uno de sus autovalores es negativo.

f) Calcularemos el número de condición en las cuatro normas más importantes de A,

$$\|A\|_1 = 4{,}95204, \quad \|A\|_\infty = 5{,}112, \quad \|A\|_2 = 4{,}91623, \quad \rho(A) = 4{,}91363,$$

y para la inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4539{,}41 & 37{,}0028 \\ 184{,}829 & -1{,}30305 \end{pmatrix},$$

sus normas son

$$\|A^{-1}\|_1 = 4724{,}23, \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 4576{,}41,$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 4543{,}32, \quad \rho(A^{-1}) = 4540{,}91,$$

por lo que los tres números de condición son

$$\kappa_1(A) = 23394{,}58, \qquad \kappa_\infty(A) = 23394{,}61,$$

$$\kappa_2(A) = 22336{,}01, \qquad \kappa_\rho(A) = \frac{4{,}91363}{0{,}00022022} = 22312,$$

que indica que la matriz está mal condicionada.

g) Conclusiones: Aunque el error relativo en la variable y es del mismo orden $\approx 0{,}5 \times 10^{-3}$ para todos los métodos, el error relativo para la regla de Cramer (0.057) es una cuatro veces mayor que el error para los métodos de Gauss (b, 0.014) y (c, 0.015), que es prácticamente igual, y que a su vez son unas dos veces más grande que el error cuando se usa pivotaje completo (0.0082). Es decir, debido al mal condicionamiento de la matriz de coeficientes los métodos que usan más operaciones aritméticas (Cramer) tiene mayor error y los que minimizan posibles diferencias cancelativas (pivotaje completo) provocan menor error.

5. Calcule la solución exacta de $A\,x = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6384 & 0{,}8065 \\ 0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0{,}8319 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix}.$$

Calcule el vector x_c tal que $r = A\,x_c - b$ es exactamente igual a

$$b = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{8} \end{pmatrix}.$$

Calcule el número de condición de A usando norma infinito. Si el ordenador representa b exactamente (sin error), calcule el error relativo de A tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Si el ordenador no comete error al representar A, calcule el error relativo de b tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Repita los resultados anteriores en norma 1.

Solución.

a) Para calcular la solución exacta podemos utilizar eliminación de Gauss, o cualquier otro procedimiento con aritmética exacta. Calcularemos directamente la inversa (ya que más tarde tendremos que determinar el número de condicionamiento),

$$|A| = -10^{-8}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 0{,}4096 & -0{,}8065 \\ -0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix},$$

con lo que la solución exacta es

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}\, b = 10^8 \begin{pmatrix} 0{,}4096 & -0{,}8065 \\ -0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8319 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix} \\ &= 10^8 \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) El vector x_c pedido es

$$\begin{aligned} x_c &= A^{-1}\,(r+e) = \begin{pmatrix} 0{,}4096 & -0{,}8065 \\ -0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 83189999 \\ 42250001 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2{,}2161 \\ 3{,}4684 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) El número de condición de la matriz de coeficientes es

$$\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|,$$

por lo que en norma infinito

$$\|A\|_\infty = 2{,}44, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 2{,}47\times 10^8, \qquad \kappa_\infty(A) = 6{,}04\times 10^8.$$

y en norma uno

$$\|A\|_1 = 2{,}47, \quad \|A^{-1}\|_1 = 2{,}44\times 10^8, \qquad \kappa_1(A) = 6{,}04\times 10^8.$$

d) Si suponemos que A tiene un error δA y que b es exacto,

$$(A + \delta A)\,(x + \delta x) = b,$$

y la ecuación del error es

$$A\,\delta x = -\delta A\,(x + \delta x),$$

con lo que aplicando normas y la desigualdad triangular

$$\|\delta x\| \leq \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\,(\|x\| + \|\delta x\|),$$

de donde

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{e_r(A)}{1 - e_r(A)}, \qquad e_r(A) = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|},$$

por lo que

$$\frac{e_r(A)}{1 - e_r(A)} \leq 10^{-8}, \qquad e_r(A) \leq \frac{10^{-8}}{1 + 10^{-8}} \approx 10^{-8}$$

(tanto en norma 1 como ∞) garantiza que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 10^{-8}.$$

e) Si suponemos que b tiene un error δb y que A es exacto,

$$A\,(x + \delta x) = (b + \delta b),$$

de donde la ecuación del error es

$$A\,\delta x = \delta b,$$

y como

$$A\,x = b, \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$\delta x = A^{-1}\,\delta b, \quad \Rightarrow \quad \|\delta x\| \leq \|\delta b\|\|A^1\|,$$

entonces
$$\frac{\|\delta\, x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}\,\|\delta\, x\| \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|\delta\, b\|}{\|b\|} = \kappa(A)\,\frac{\|\delta\, b\|}{\|b\|},$$
y (tanto en norma uno como infinito),
$$\frac{\|\delta\, b\|}{\|b\|} \leq \frac{10^{-8}}{\kappa(A)} \approx 1{,}66 \times 10^{-17},$$
garantiza que
$$\frac{\|\delta\, x\|}{\|x\|} \leq 10^{-8}.$$

6. Una matriz de Hilbert $H^n = (h^n_{ij})$ tiene como elementos
$$h^n_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$
¿Es simétrica y definida positiva? Si lo es, aplica la descomposición de Cholesky LL^T a la matriz H^4. A partir de ella calcula la descomposición modificada de Cholesky LDL^T.

Solución. Las matrices de Hilbert son simétricas y definidas positivas, esto último se puede demostrar de varias formas. Por inducción, calculando el determinante de sus menores principales, que son también matrices de Hilbert y mostrando que todos son positivos (largo), o calculando sus autovalores (difícil) y comprobando que son positivos.

El método de Cholesky conduce a la matriz L
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0{,}2887 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0{,}2887 & 0{,}07454 & 0 \\ 1/4 & 0{,}2598 & 0{,}11180 & 0{,}01890 \end{pmatrix}.$$
(detalle los cálculos, es fácil).

Llamando D a la matriz diagonal de L, haciendo $\tilde{L} = LD$ y $\tilde{D} = D^2$ obtenemos $A = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^\top$ donde
$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 9/10 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2800 \end{pmatrix}.$$

7. Dada la matriz A dominante por filas

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

con $\|A\|_\infty < \infty$, donde la norma infinito es

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

a) ¿Cuál es el mayor valor posible de $\|A\|_\infty$?

b) Para ese valor, ¿cuál es la solución del sistema $Ax = 0$? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es el menor valor posible de $\|A\|_\infty$?

d) Para ese valor, ¿cuál es la solución de $Ax = b$, si $b \neq 0$? ¿Por qué?

e) Para cualquier otro valor de $\|A\|_\infty$, cuál es la solución de $Ax = 0$? ¿Por qué?

Solución.

a)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + |a_{ii}| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|.$$

b) Sea x la solución de $Ax = 0$ y k tal que $|x_k| = \max |x_i| \neq 0$, entonces

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{kj}x_j,$$

y aplicando valores absolutos

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{kj}||x_k|,$$

de donde llegamos a una contradicción

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{kj}|,$$

lo que contradice la dominancia diagonal, luego $x_k = 0$ y $x = 0$.

c) Obviamente el mínimo de $\|A\|_\infty = 0$ para $A = 0$.

d) Para $A = 0$ el sistema $Ax = b$ es incompatible, luego no tiene solución, salvo que $b = 0$, en cuyo caso tiene infinitas soluciones $x \in \mathbb{R}^n$.

e) La solución de $Ax = 0$ será la trivial ($x = 0$) si A tiene inversa y habrá infinitas soluciones (dependiendo del rango de A) en otro caso.

8. Si $A = U^\top U$ donde U es una matriz triangular superior con autovalores no nulos de multiplicidad geométrica igual a su multiplicidad algebraica, demuestre

   a) que A es simétrica y definida positiva,

   b) que A tiene inversa,

   c) la relación entre los autovalores de A y U,

   d) la relación entre los autovectores de A y U,

   e) la relación entre los autoespacios de A y U.

   Solución.

   a) A es simétrica ($A^\top = U^\top U$), semi-definida positiva

   $$x^\top A x = x^\top U^\top U x = \|Ux\| \geq 0, \qquad \forall x \neq 0,$$

   y como U tiene autovalores no nulos, $|U| \neq 0$,

   $$|A| = |U|^2 = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{Ai} > 0,$$

   luego $\lambda_{Ai} > 0$ y también es definida positiva.

   b) Una matriz definida positiva tiene autovalores positivos y no es singular.

   c) Sean los autovectores y autovalores de A, $Ae_i = \lambda_i e_i$; estos autovectores forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ ya que A es simétrica. Sean los autovectores y autovalores de U, $Uw_i = \beta_i w_i$. Los autovalores de $U^\top$ son los mismos que los de U, y se encuentran en su diagonal, pero sus autovectores pueden ser distintos

   $$w_i^\top U^\top = \beta_i w_i^\top, \qquad U^\top \tilde{w}_i = \beta_i \tilde{w}_i.$$

La forma canónica de Jordan de U es diagonal y sus autovectores también forman una base de $\mathbb{R}^n$, que supondremos ortonormal, por lo que en la base de los autovectores de A tenemos

$$w = \alpha e, \qquad w_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j,$$

donde α es una matriz unitaria. De esta forma

$$w_i^\top A w_i = w_i^\top U^\top U w_i = \beta_i^2 w_i^\top w_i, \qquad \beta_i^2 = \frac{w_i^\top A w_i}{w_i^\top w_i},$$

que se puede escribir en función de los autovalores de A,

$$w_i^\top A w_i = \left(\sum_j \alpha_{ij} e_j^\top \right) A \left(\sum_k \alpha_{ik} e_k \right) = \sum_{jk} \alpha_{ij} \alpha_{ik} \lambda_k e_j^\top e_k = \sum_j \alpha_{ij}^2 \lambda_j,$$

$$w_i^\top w_i = \sum_j \alpha_{ij}^2, \qquad \beta_i^2 = \frac{\sum_j \alpha_{ij}^2 \lambda_j}{\sum_j \alpha_{ij}^2}.$$

d) En cuanto a la relación entre los autovectores, lo más que podemos decir es que existe una matriz (transformación) unitaria α que relaciona éstos entre sí $w_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$.

e) Dado que cada uno de los autovectores de U y de A está relacionado mediante una transformación unitaria, sus autoespacios también están relacionados mediante la misma transformación unitaria.

9. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz

$$A = I - 2\, w\, w^{*\top}.$$

a) ¿A es simétrica?, ¿es hermítica?.

b) ¿Cómo son sus autovalores? Demuéstrelo.

c) ¿Cómo son sus autovectores? Demuéstrelo.

d) ¿Cómo son sus filas? y, ¿columnas?

e) Escribe su forma normal de Schur.

f) ¿Se puede aplicar el método de Cholesky?, ¿por qué?

Solución.

a) Calculando por partes,

$$A^* = I^* - 2\,w^* w^\top = I - 2\,w^* w^\top,$$

$$A^{*\top} = I^\top - 2\,(w^\top)^\top (w^*)^\top = I - 2\,w w^{*\top} = A,$$

observamos que A es hermítica. Si w fuera real, sería simétrica.

b) Sus autovalores son reales por ser hermítica (demuestrelo).

c) Sus autovectores son linealmente independientes y ortogonales, por lo que forman una base de $\mathbb{C}^n$ (demuestrelo).

d) Además es unitaria, ya que

$$A A^{*\top} = (I - 2\,w w^{*\top})^2 = I - 4\,w w^{*\top} + 4 w \underbrace{w^{*\top} w}_{\|w\|_2 = 1} w^{*\top} = I,$$

por lo que sus vectores fila (o columna) son ortonormales.

e) Como A es hermítica, su forma normal de Schur es diagonal (demuestrelo), más aún, como es unitaria, sus autovalores son iguales a la unidad (demuestrelo).

f) Como es hermítica y definida positiva (autovalores positivos), el algoritmo de Cholesky se puede aplicar sin ningún problema.

10. Para resolver el problema de condiciones de contorno

$$y'' + a y' + b y = f(x), \qquad y(x_l) = y_l, \quad y(x_r) = y_r,$$

donde a, b, y_l e y_r son constantes, se pueden usar diferencias finitas de la siguiente forma. Se define una malla $\{x_i\}$,

$$x_i = x_0 + h i, \qquad h = \frac{x_r - x_l}{n}, \qquad x_r = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_l,$$

se aproxima $y(x_i) \approx y_i$ y se aproximan las derivadas

$$y'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

dando lugar a la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+a\,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+b\,y_i=f(x_i),\quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax=b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

Sea el problema de valores iniciales periódico

$$y''+ay'+by=f(x),\qquad \frac{d^n y(x_l)}{dx^n}=\frac{d^n y(x_r)}{dx^n},\quad n\geq 0.$$

Aplique un método en diferencias finitas a este problema como el anteriormente descrito. ¿Qué ecuación en diferencias obtiene? Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax=b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

Solución. La ecuación en diferencias finitas

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+a\,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+b\,y_i=f(x_i),\quad i=1,2,\ldots,n-1,$$

es un sistema lineal (tridiagonal) $Ay=b$ donde

$$A=(a_{i,j}),\qquad a_{i,i}=b-\frac{2}{h^2},\qquad a_{i,i\pm1}=\frac{1}{h^2}\pm\frac{a}{2h},$$
$$b=(b_i),\qquad b_i=f(x_i),\quad i=2,\ldots,n-2,$$
$$b_1=f(x_1)-\frac{y_l}{h^2}+\frac{ay_l}{2h},\qquad b_{n-1}=f(x_{n-1})-\frac{y_r}{h^2}-\frac{ay_r}{2h},$$
$$y=(y_i),\quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

La matriz A no es simétrica, salvo que $a=0$ y tampoco es definida positiva (por ejemplo, para $a=b=0$ es definida negativa). A es tridiagonal pero su inversa es densa.

Para resolver mediante factorización LU de Crout (U tiene diagonal unitaria) el sistema $Ax=b$ comparamos término a término el producto

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & \vdots \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con la matriz tridiagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & & \vdots \\ 0 & \gamma & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha &= b - \tfrac{2}{h^2}, \\ \beta &= \tfrac{1}{h^2} + \tfrac{a}{2h}, \\ \gamma &= \tfrac{1}{h^2} - \tfrac{a}{2h}, \end{aligned}$$

lo que nos da la relación de recurrencia

$$l_{11} = \alpha, \qquad u_{12} = \beta/\alpha,$$

$$l_{k,k-1} = \gamma, \qquad l_{kk} = \alpha - \gamma u_{k-1,k} = \alpha - \gamma\beta/l_{k-1,k-1}, \quad k = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$u_{k,k+1} = \beta/l_{kk}, \quad k = 1,2,\ldots,n-2.$$

Una vez determinadas L y U tenemos que resolver los sistemas de ecuaciones $Lx=b$ y $Uy=x$,

$$x_1 = b_1/l_{11} = b_1/\alpha, \qquad x_k = (b_k - \gamma x_{k-1})/l_{kk}, \quad k = 2,\ldots,n-1,$$

$$y_{n-1} = x_{n-1}, \qquad y_k = x_k - y_{k+1}\beta/l_{kk}, \quad k = n-2,\ldots,1.$$

Por otro lado, para la ecuación en diferencias finitas periódica identificamos $y_0 \equiv y_n$ y hacemos $y_{-1} = y_{n-1}$ e $y_{n+1} = y_1$, con lo que el sistema lineal (tridiagonal periódico) $Ay=b$ toma la forma

$$A = (a_{i,j}), \qquad a_{i,i} = b - \frac{2}{h^2}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$a_{i,i+1} = a_{n-1,0} = \frac{1}{h^2} + \frac{a}{2h}, \quad i = 0,1,\ldots,n-2,$$

$$a_{i,i-1} = a_{0,n-1} = \frac{1}{h^2} - \frac{a}{2h}, \quad i = 1, 1, \ldots, n-1,$$
$$b = (b_i), \qquad b_i = f(x_i), \qquad y = (y_i), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

La matriz A no es simétrica, salvo que $a = 0$ y tampoco es definida positiva. A es tridiagonal periódica pero su inversa es densa.

Para resolver mediante factorización LU de Crout (U tiene diagonal unitaria) el sistema $Ax = b$ comparamos término a término el producto

$$\begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 & & \vdots \\ 0 & l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ l_{n-1,0} & \cdots & & l_{n-1,n-2} & l_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{01} & 0 & \cdots & u_{0,n-1} \\ 0 & 1 & u_{12} & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & u_{n-2,n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con la matriz tridiagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta & & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \cdots & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha = b - \frac{2}{h^2}, \\ \beta = \frac{1}{h^2} + \frac{a}{2h}, \\ \gamma = \frac{1}{h^2} - \frac{a}{2h}, \end{array}$$

lo que nos da la relación de recurrencia

$$l_{00} = \alpha, \qquad u_{01} = \beta/\alpha, \qquad u_{0,n-1} = \gamma/\alpha,$$
$$l_{k,k-1} = \gamma, \qquad l_{kk} = \alpha - \gamma u_{k-1,k} = \alpha - \gamma\beta/l_{k-1,k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-2,$$
$$u_{k,k+1} = \beta/l_{kk}, \quad , u_{k,n-1} = -\gamma u_{k-1,n-1}/l_{kk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2.$$
$$l_{n-1,0} = \beta, \quad l_{n-1,k} = -l_{n-1,k-1} u_{k-1,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3,$$
$$l_{n-1,n-2} = \gamma - l_{n-1,n-3} u_{n-3,n-2}, \quad l_{n-1,n-1} = \alpha - \sum_{k=0}^{n-2} l_{n-1,k} u_{k,n-1},$$

Una vez determinadas L y U tenemos que resolver los sistemas de ecuaciones $Lx = b$ y $Uy = x$ (hagalo).