

Ejercicios de Métodos Iterativos para Ecuaciones Algebraicas.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x + ay &= a \\ax + y + bz &= b \\by + z &= c\end{aligned}$$

- a) Determine los valores de  $a$  y  $b$  para que el sistema tenga solución única
  - b) Determine los valores de  $a$  y  $b$  para asegurar la convergencia del método de Gauss-Jacobi para la resolución de dicho sistema
  - c) Determine los valores de  $a$  y  $b$  para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel
  - d) Estudiar la convergencia de los métodos anteriores y el método de Cholesky para los valores de  $a$  y  $b$  para los que la matriz de los coeficientes del sistema es simétrica.
2. Sea  $B$  una matriz real cuadrada de orden  $n \times n$  tal que  $Bx = 0$  y  $|B| = 0$ .
- a) ¿Cuál es la relación entre  $b_{ii}$  y  $b_{ij}$ , donde  $B = (b_{ij})$ ?
  - b) Si  $B = A - \lambda I$  donde  $\lambda$  son los autovalores de  $A$ , ¿cuál es la relación entre  $\lambda$  y los coeficientes o elementos de la matriz  $A$ ?
  - c) ¿Cuál es la relación entre  $|\lambda|_{\max}$  y  $|\lambda|_{\min}$  y los elementos de  $A$ ?
  - d) Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n \times n$  tal que  $a_{ii} = 1$ . Deduzca las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de esta matriz para que el método iterativo de Gauss-Jacobi converja cuando se utiliza para resolver el sistema  $Ax = b$ .
3. Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$\begin{aligned}10x_1 - 3x_2 &= 2 \\-3x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 3 \\-2x_2 + 10x_3 &= 5,\end{aligned}$$

es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación  $w$  escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa  $w$  tomando como valores iniciales  $x = 0$ . Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

4. ¿Puede converger un método iterativo para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$x^{(k)} = B x^{(k-1)} + c,$$

siendo  $B$  una matriz singular ( $|B| = 0$ )?

5. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine

- el vector  $x$  tal que  $Ax = b$  por factorización de Cholesky,
  - $A^{-1}$  a partir de la factorización de Cholesky,
  - ¿converge el método de Gauss-Jacobi? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial  $x^{(0)} = 0$ ,
  - ¿converge el método de Gauss-Seidel? Realiza cuatro iteraciones con el vector inicial  $x^{(0)} = 0$ ,
  - calcula el polinomio característico de  $A$ , y calcula sus raíces (aplica Ruffini para la raíz unidad),
  - la descomposición LU (es decir,  $A = LU$  donde  $L$  es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y  $U$  es una matriz triangular superior.
6. Dado el sistema  $Ax = b$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

- un método directo que, a su juicio, sea el más preciso,

- b) justifique el uso del método que utilizó en (a),
- c) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Jacobi? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.
- d) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcula la tasa exacta de convergencia.
- e) utilice un parámetro de relajación  $w$  y determine para qué valores de dicho parámetro un método de relajación converge. Para un valor  $w \neq 0$  y  $w \neq 1$ , si para dicho valor el método converge, haga dos iteraciones y determine la tasa de convergencia del método de relajación que ha utilizado.
7. Para la resolución del sistema  $Bx = b$ , donde  $x, b \in \mathbb{R}^2$ , se propone el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = b + Ax^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, c \in \mathbb{R}.$$

- a) ¿Para qué valores de  $\lambda$  y  $c$  existe solución única?
- b) Sea  $x_{PF}$  el punto fijo de la iteración. Calcule  $x_{PF} - x^{(k)}$  para aquellos valores de  $\lambda$  y  $c$  para los que existe solución única. Suponga que  $|\lambda| < 1$ .
- c) Para las condiciones del apartado (b), ¿cómo se comporta  $\|x_{PF} - x^{(k)}\|_\infty$  y  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ ? ¿Es la convergencia al punto fijo independiente de  $c$ ? Justifique todos los resultados.
8. Dado el sistema  $Ax = b$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

- a) por factorización de Cholesky.
- b) ¿Puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. Además calcule la tasa exacta de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de  $10^{-5}$ .
- c) ¿Puede resolver este sistema por el método del descenso más rápido? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones y determine la tasa numérica de convergencia.
- d) ¿Puede resolver este sistema por el método del gradiente conjugado? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo tres iteraciones a partir de la solución nula y determine la tasa numérica de convergencia. ¿Cuántas iteraciones necesitará para alcanzar un error absoluto de  $10^{-5}$ .
- e) Desarrolle un método de relajación basado en el método del gradiente conjugado. Determine para qué valores del parámetro  $w$  el método de relajación converge. ¿Cómo determinaría el  $w$  óptimo? Itere tres veces el método que ha obtenido (con el  $w$  óptimo).

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule su factorización LU por medio de los métodos de Doolittle y Crout. Calcule también la descomposición de Cholesky y la descomposición de Cholesky modificada ( $L^T DL$ ).

10. Dada un sistema tridiagonal  $\langle a_i, \textcircled{b}_i, c_i \rangle x = \langle d_i \rangle$ ,

$$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2,$$

$$a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3,$$

⋮

$$a_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n = d_n,$$

escribe el algoritmo de factorización de Doolittle y de Crout para dicho sistema general (Algoritmos de Thomas).