Sexta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro — 17 de Diciembre de 1999

Ejercicios del tema de cálculo de raíces y ceros de funciones.

1. Un punto fijo α de la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ se denomina estable si $|g'(\alpha)| < 1$ e inestable en caso contrario. Para un punto fijo estable, existe un entorno (suficientemente pequeño) para el cual el método converge a dicho punto fijo. Para un punto fijo inestable, dicho entorno no existe. Establezca la convergencia de las siguientes iteraciones:

   a) $g(x) = \sqrt{1+x^2}$,

   b) $g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$,

   c) $g(x) = x + \mu\,(e^x - 4\,x^2)$,

   d) $g(x) = x^3 - 1$,

   e) $g(x) = (1+x)^{1/3}$,

   f) $g(x) = \tan x$,

   g) $g(x) = x + \mu\,(\tan x - x)$,

   h) $g(x) = x + \mu\,(e^{-x} - \cos x)$.

   Para los métodos con parámetro de relajación μ resuelva el ejercicio en función de μ. NOTA: Determine todos los puntos fijos o al menos un intervalo en el que se encuentren (si hay infinitos, continue los siguientes apartados con el de valor absoluto, no nulo, menor), determine el intervalo I_α más grande que garantice que $x_0 \in I_\alpha$ converge a α, compruebe también la condición de contractividad $g(I_\alpha) \subset I_\alpha$.

2. *a*) Considere el método de Newton-Raphson para calcular las raíces de $f(x) = 0$. Suponga que para el punto fijo α, se cumple que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. ¿Cuáles son los valores de $g'(\alpha)$ y $g''(\alpha)$ si lo denotamos $x_{n+1} = g(x_n)$?

   b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, ¿converge el método de Newton cuadráticamente?

   c) Establezca las condiciones bajo las cuales el método de Newton converge cúbicamente.

d) Si $x = \alpha$ es un cero de multiplicidad m de $f(x) = 0$, deduzca la convergencia de la iteración

$$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

y las condiciones de dicha convergencia.

3. Considere la iteración de Picard con relajación no estacionaria

$$x_{n+1} = x_n - \mu\, f(x_n),$$

donde $\mu = \mu(x_n, f(x_n), f'(x_n))$. ¿Cuando converge este método?

4. Suponga que se quieren calcular las raíces de $f(x) = 0$ mediante el siguiente método de Newton-Raphson modificado: Dada x_n calcule

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

que equivale a un método de Newton estándar en el que la derivada se re-calcula sólo cada dos pasos. Demuestre que este método converge cúbicamente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^3} \neq 0.$$

5. Calcule el punto fijo y la tasa de orden de convergencia de la iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n \geq 0,$$

suponiendo que x_0 está cerca del punto fijo, donde

$$g(x) = \frac{x\,(x^2 + 3\,a)}{3\,x^2 + a}, \qquad a \geq 0.$$

6. Calcule el cero de $f(x) = x - 0{,}2\,\sin x - 0{,}5$, en el intervalo $[0{,}5, 1]$ con una exactitud de 6 cifras decimales en la mantisa por medio de los métodos

a) bisección,

b) regula falsi,

c) Newton,

d) secante,

y determine los residuos para todos estos métodos

7. Para la iteración $x_{i+1} = \sqrt{2 + x_i}$ determine sus puntos fijos e intervalo de convergencia. Aplique 6 pasos de iteración funcional. Aplique la regla de la δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de dicha iteración.

8. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1,$$

determine:

a) su número de raíces positivas,

b) su número de raíces negativas,

c) intervalos donde se encuentren cada una de sus raíces reales,

d) entornos donde se eneucnetran cada una de sus raíces complejas,

e) sus cuatro raíces mediante el método de Bairstow,

f) sus cuatro raíces mediante el método de Newton con deflación.

9. Calcule los ceros de $x^7 - 1 = 0$ mediante el método de Newton aplicado al sistema de dos ecuaciones con dos incógnicas que se obtiene para $x = a + \imath b$. Determine estimaciones iniciales de las raíces que garanticen la convergencia del método e itere el método hasta obtener 3 dígitos de precisión adicionales a los de sus estimaciones iniciales.

10. Calcule los ceros de $\sin^6 z - 1 = 0$ mediante el método de Newton aplicado al sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnicas que se obtiene para $x = a + \imath b$. Utilice una formulación delta para el método de Newton y aplique un método de Gauss-Seidel con relajación para resolver las ecuaciones en dicha formulación. Determine estimaciones iniciales de las raíces que garanticen la convergencia del método e itere el método hasta obtener 3 dígitos de precisión adicionales a los de sus estimaciones iniciales.