Sexta relación de problemas
Profesor Francisco R. Villatoro

Técnicas Numéricas
14 de Enero de 2000

SOLUCIONES

Soluciones de los ejercicios sobre cálculo de ceros de funciones.

1. Un punto fijo α de la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ se denomina estable si $|g'(\alpha)| < 1$ e inestable en caso contrario. Para un punto fijo estable, existe un entorno (suficientemente pequeño) para el cual el método converge a dicho punto fijo. Para un punto fijo inestable, dicho entorno no existe. Establezca la convergencia de las siguientes iteraciones:

   a) $g(x) = \sqrt{1+x^2}$,
   b) $g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$,
   c) $g(x) = x + \mu\,(e^x - 4\,x^2)$,
   d) $g(x) = x^3 - 1$,
   e) $g(x) = (1+x)^{1/3}$,
   f) $g(x) = \tan x$,
   g) $g(x) = x + \mu\,(\tan x - x)$,
   h) $g(x) = x + \mu\,(e^{-x} - \cos x)$.

   Para los métodos con parámetro de relajación μ resuelva el ejercicio en función de μ. NOTA: Determine todos los puntos fijos o al menos un intervalo en el que se encuentren (si hay infinitos, continue los siguientes apartados con el de valor absoluto, no nulo, menor), determine el intervalo I_α más grande que garantice que $x_0 \in I_\alpha$ converge a α, compruebe también la condición de contractividad $g(I_\alpha) \subset I_\alpha$.

   Solución.

   a) $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.
   Primero debemos determinar si existe el punto fijo,

$$\alpha = \sqrt{1+\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1,$$

luego el punto fijo de esta iteración no existe. Por lo tanto la secuencia no puede converger a ningún punto. Sin embargo, es bueno notar que esta función $g(x)$ es contractiva para

$$x_0 \in I = (-\infty, \infty), \qquad g(x_0) \in [1, \infty),$$

ya que $[1, \infty) \subset I = (-\infty, \infty)$. Además,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad |g'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1,$$

sin embargo, la secuencia diverge ya que para cualquier x_0,

$$x_1 = \sqrt{1+x_0^2} > x_0, \qquad x_2 = \sqrt{1+x_1^2} > x_1 > x_0, \qquad \ldots$$

b) $g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$.
El punto fijo para la iteración es

$$\alpha = \frac{1}{2}\, e^{\alpha/2}, \qquad (2\,\alpha)^2 = e^{\alpha}$$

es raíz de la ecuación $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$. Además esta ecuación tiene dos raíces, ya que dibujando la función exponencial y la parábola se observan claramente dos raíces, sean $\alpha_1 \in [0,1]$ y $\alpha_2 \in [4,5]$, que se verifican fácilmente aplicando el teorema de Bolzano (la función f es continua)

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 4 < 0,$$

$$f(4) = e^4 - 4\,4^2 = e^4 - 8^2 < 0, \qquad e < \sqrt{8} \approx 2{,}8,$$

$$f(5) = e^5 - 4\,5^2 \approx (2{,}7)^4 \times 2{,}7 - 100 \approx 53 \times 2{,}7 - 100 \approx 143 - 100 > 0,$$

Consideraremos la convergencia hacia la primera raíz α_1. Para esta raíz g es contractiva, ya que es creciente para $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{1}{4}\, e^{x/2} > 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

y además

$$g(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5, \qquad g(1) = \frac{1}{2}\, e^{1/2} \approx \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8,$$

(ya que $17^2 = 289$, y $16^2 = 256$), por lo que obtenemos

$$g([0,1]) \approx [0{,}5, 0{,}8] \subset [0,1].$$

Además como $|g'([0,1])| < 1$, para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$, la iteración converge a un punto fijo, es decir, a una raíz de $f(x)$ en dicho intervalo.

El intervalo más grande de convergencia hacia α_1 es $(-\infty, \beta)$, donde $\beta \in (2,3)$ es la raíz de $g'(x) = 1$ (compruebelo).

c) $g(x) = x + \mu\,(e^x - 4\,x^2)$.

El punto fijo para esta iteración es

$$\alpha = \alpha + \mu(e^\alpha - 4\,\alpha^2),$$

es raíz de la misma ecuación $f(x) = e^x - 4\,x^2 = 0$ que en el apartado anterior. Estudiaremos esta iteración para el otro punto fijo de dicho problema, es decir, $\alpha_2 \in [4,5]$.

En esta iteración de Picard con relajación deberemos elegir μ (si es posible) tal que

$$g([4,5]) \subset [4,5], \qquad |g'([4,5])| < 1.$$

Aunque $g(x;\mu)$ no es monótona $\forall x \in [4,5], \mu \in \mathbb{R}$, podemos probar con

$$5 > g(4) > 4, \qquad 5 > 4 - 9{,}40\,\mu > 4, \qquad -0{,}11 < \mu < 0,$$

$$5 > g(5) > 4, \qquad 5 > 5 + 48{,}41\,\mu > 4, \qquad -0{,}021 < \mu < 0,$$

y para $g'(x)$ que es una función monótona decreciente para $\mu < 0$, basta comprobar que

$$|g'(5)| < 1, \qquad -1 < 1 + 108{,}41\,\mu < 1, \qquad -0{,}0092 < \mu < 0,$$

con lo que para $-0{,}0092 < \mu < 0$, $1 > |g'(x)|$; de hecho, $1 > g'(x) > 0$ y, por tanto, la función $g(x)$ cumple rigurosamente con las condiciones necesarias para convergencia, y para todo $x_0 \in [4,5]$ la iteración converge si $-0{,}0092 < \mu < 0$.

d) $g(x) = x^3 - 1$.

El punto fijo de esta iteración (si existe) cumplirá $f(\alpha) = \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$. Estudiaremos esta función, cuya gráfica es fácil de obtener (se deja al alumno), y sus derivadas

$$f'(x) = 3\,x^2 - 1 = 0, \qquad f''(x) = 6\,x,$$

indican que es una función creciente en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, alcanza un máximo en $-1/\sqrt{3}$, decrece hasta alcanzar un mínimo en $1/\sqrt{3}$ y sigue creciendo. Tanto el mínimo como el máximo tienen ordenadas negativas, luego el polinomio cúbico $f(x)$ tiene dos raíces complejas conjugadas y una raíz en $(1/\sqrt{3}, \infty)$. Tanteando con $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, Bolzano nos indica que la raíz se encuentra en $(1, 2)$.

La iteración funcional que estamos estudiando no converge, ya que $g'(x) = 3\,x^2$ es creciente en $(1, 2)$ y $g'([1, 2]) = [3, 12]$, que no cumple $|g'(x)| < 1$ para la raíz.

e) $g(x) = (1 + x)^{1/3}$.

El punto fijo de esta iteración es el mismo que el del apartado anterior (compruebelo) y se tiene que

$$g'(x) = \frac{1}{3\,(1+x)^{2/3}}.$$

Vamos a estudiar esta función, para simplificar los cálculos, en el intervalo $[0, \infty) \supset [1, 2]$, ya que como $g(x)$ es ahora monótona creciente y $g'(x)$ es monótona decreciente, y además

$$g'([0, \infty)) = [\frac{1}{3}, 0], \qquad g([0, \infty)) = [1, \infty) \subset [0, \infty),$$

con lo que queda garantizada la convergencia de la iteración para cualquier $x_0 \in [1, 2] \subset [0, \infty)$. El intervalo máximo de convergencia es (γ, ∞) donde $\gamma \in (-1, 0)$ es la raíz de $g'(x) = 1$.

f) $g(x) = \tan x$.

El punto fijo de esta iteración cumple $f(x) = x - \tan x = 0$, ecuación que tiene infinitas raíces en los puntos de corte de la recta $y = x$ y la función periódica $y = \tan x$, que tiene asíntotas verticales en $(2\,k+1)\,\pi/2$, $k \in \mathrm{Z}$, por lo que existirá una raíz ξ_k en cada intervalo

$$\xi_k \in I_k = ((2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}, (2\,k+3)\,\frac{\pi}{2}), \qquad k \in \mathrm{Z},$$

siendo la más sencilla $x = 0$ (intervalo con $k = -1$), para $k > 0$ las raíces en el intervalo I_k estarán cerca de su extremo derecho, es decir, cerca de $(2\,k+3)\,\frac{\pi}{2}$, y para $k < 0$, al contrario, estarán cerca de su extremo izquierdo, es decir, $(2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}$.

La iteración considerada cumple $g'(x) = \sec^2 x$, con el inconveniente de que $g'(0) = 1$ y de que, debido a que las raíces están próximas a las asintóticas verticales de la tangente, $g'(x)$ cerca de las raíces será mayor que la unidad (lo que se puede comprobar rigurosamente).

g) $g(x) = x + \mu\,(\tan x - x)$,

Esta iteración tiene como puntos fijos los mismos que la del apartado anterior.

Ahora $g'(x) = 1 + \mu\,\tan^2 x$, y para un intervalo suficientemente pequeño alrededor de la raíz ξ_k podremos tener contractividad haciendo μ negativo y suficientemente pequeño.

Consideremos la raíz de menor módulo positivo (ξ_1) que se encuentra cerca de $3\,\pi/2 \approx 4{,}7$, podemos tantear

$$f(4) \approx 2{,}84, \quad f(4{,}7) \approx -76{,}0, \quad f(4{,}4) \approx 1{,}30, \quad f(4{,}5) \approx -0{,}14,$$

por lo que $\xi_1 \in [4{,}4, 4{,}5]$. Para μ negativo cercano a cero y pequeño, la función $g'(x) > 0$ (y decreciente ya que para esos valores $g''(x) = 2\,\mu\,\sec^2 x\,\tan x < 0$) y $g(x)$ es creciente, luego haciendo

$$4{,}4 < g(4{,}5) < 4{,}5, \qquad 4{,}4 < 4{,}5{+}0{,}14\,\mu < 4{,}5, \qquad -0{,}73 < \mu < 0,$$

$$|g'(4{,}5)| < 1, \qquad -1 < 1 + \mu\,\tan^2 4{,}5 < 1, \qquad -0{,}093\mu < 0,$$

con lo que para $-0{,}093\mu < 0$ la iteración converge para la raíz ξ_1 que está en el intervalo $[4{,}4, 4{,}5]$. Omitiremos el cálculo del intervalo máximo de convergencia.

h) $g(x) = x + \mu\,(e^{-x} - \cos x)$.

El punto fijo de esta iteración será cero de $f(x) = e^{-x} - \cos x$. Claramente, $x = 0$ es una raíz, como para $x < 0$, $e^{-x} = e^{|x|} >$

$1 > |\cos x|$, no existe ninguna raíz negativa. Como para $x > 0$, $e^{-x} \approx 0$, las infinitas (numerable) raíces positivas de $f(x)$, sean ξ_k, se encuentran cercanas a las raíces del coseno, es decir, $c_k = (2\,k{+}1)\,\pi/2$, con $k \in \mathbb{N}$. Además conforme k crece, ξ_k se encuentra más cerca de la raíz c_k del coseno y además para k impar, la raíz $\xi_k < c_k$ y para k par, $\xi_k > c_k$.
La iteración de Picard con relajación considerada tiene

$$g'(x) = 1 + \mu\,(\sin x - e^{-x}),$$

y la utilizaremos para calcular la primera raíz positiva que sabemos se encuentra en el intervalo $I = (0, \pi/2)$. En este intervalo,

$$g''(x) = \mu\,(e^{-x} + \cos x) > 0, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

luego $g'(x)$ es una función creciente si $\mu > 0$ y decreciente si $\mu < 0$, y al imponer la condición

$$|g'(x)| < 1, \qquad |g'(\pi/2)| < 1, \quad |g'(0)| < 1,$$

$$-1 < 1 + 0{,}79\,\mu < 1, \qquad 0 > \mu > -2{,}53,$$
$$-1 < 1 + \mu < 1, \qquad 0 < \mu < 2,$$

que son condiciones incompatibles; debemos elegir un intervalo más pequeño, probemos con $[\pi/4, \pi/2]$, y entonces

$$|g'(x)| < 1, \qquad |g'(\pi/2)| < 1, \quad |g'(\pi/4)| < 1,$$

$$-1 < 1 + 0{,}25\,\mu < 1, \qquad -8 < \mu < 0,$$

por tanto $-2{,}53 < \mu < 0$ satisface esta hipótesis y como

$$g([\pi/4, \pi/2]) \approx [\pi/4 - 0{,}25\,\mu, \pi/2 + 0{,}21\,\mu] \subset [\pi/4, \pi/2],$$

requiere que $-\pi \le \mu \le 0$, es decir, queda automáticamente garantizada la convergencia de esta iteración a la primera raíz positiva de la función f con cualquier valor inicial en $[\pi/4, \pi/2]$.

2. *a*) Considere el método de Newton-Raphson para calcular las raíces de $f(x) = 0$. Suponga que para el punto fijo α, se cumple que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. ¿Cuáles son los valores de $g'(\alpha)$ y $g''(\alpha)$ si lo denotamos $x_{n+1} = g(x_n)$?

b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, ¿converge el método de Newton cuadráticamente?

c) Establezca las condiciones bajo las cuales el método de Newton converge cúbicamente.

d) Si $x = \alpha$ es un cero de multiplicidad m de $f(x) = 0$, deduzca la convergencia de la iteración

$$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

y las condiciones de dicha convergencia.

<u>Solución</u>.

a) El método de Newton-Raphson para $f(x) = 0$ es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n),$$

por lo que

$$g = x - \frac{f}{f'}, \qquad g(\alpha) = \alpha,$$

$$g' = 1 - \frac{f'^2 - f\,f''}{f'^2} = \frac{f\,f''}{f'^2}, \qquad g'(\alpha) = 0,$$

$$g'' = \frac{(f'\,f'' + f\,f''')\,f'^2 - 2\,f'\,f''^2\,f}{f'^4}, \qquad g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

b) Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$, para calcular el valor de $g'(\alpha)$ necesitamos aplicar la regla de L'Hôpital,

$$g'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)\,f''(x)}{2\,f'(x)\,f''(x)} = \frac{1}{2},$$

ahora bien, la ecuación para el error nos da

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n) \\ &= \alpha - (g(\alpha) + g'(\alpha)\,(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}\,(x_n - \alpha)^2 + \cdots \\ &= g'(\alpha)\,e_n - \frac{g''(\alpha)}{2}\,e_n^2 + \cdots, \end{aligned}$$

con lo que por ser $g'(\alpha) \neq 0$, el método de Newton, en este caso, no converge cuadráticamente si no sólo linealmente.

c) El error en el método de Newton toma la forma

$$e_{n+1} = g'(\alpha)\, e_n - \frac{g''(\alpha)}{2}\, e_n^2 + \frac{g'''(\alpha)}{3!} - \frac{g^{(4)}(\alpha)}{4!}\, e_n^4 + \cdots,$$

por lo que la condición para convergencia cúbica es

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0, \qquad g'''(\alpha) \neq 0.$$

d) Si α es una raíz de multiplicidad m, entonces $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \neq f^{(m)}(\alpha)$. De los apartados anteriores, sabemos que si $m = 1$,

$$g(\alpha) = \alpha, \qquad g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) \neq 0,$$

con lo que tenemos orden cuadrático, y que si $m = 2$,

$$g(\alpha) = \alpha, \qquad g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) \neq 0,$$

con lo que también tenemos orden de convergencia cuadrática.
Nos queda estudiar el caso $m > 2$. Podemos evaluar $g^{(k)}$ sustituyendo las derivadas de f mediante el siguiente desarrollo en serie Taylor (válido ya que α es raíz de multiplicidad m),

$$f(x) \approx A\,(x-\alpha)^m, \qquad f'(x) \approx A\,m\,(x-\alpha)^{m-1},$$

y aplicando luego el límite $x \to \alpha$. Por ejemplo,

$$g(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)} = x - m\,\frac{A\,(x-\alpha)^m}{A\,m\,(x-\alpha)^{m-1}} = x - m\,\frac{x-\alpha}{m},$$

luego $g(\alpha) = \alpha$. Y para la primera derivada,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - m + m\,\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= 1 - m + m\,\frac{A\,(x-\alpha)^m\,A\,m\,(m-1)\,(x-\alpha)^{m-1}}{A^2\,m^2\,(x-\alpha)^{2(m-1)}} \\ &= 1 - m + m\,\frac{m\,(m-1)}{m^2} = 1 - m + m - 1 = 0, \end{aligned}$$

luego $g'(\alpha) = 0$. Y para la segunda derivada,

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= m\, \frac{f'(x)^2\, f''(x) + f(x)\, f'(x)\, f^{(3)}(x) - 2\, f(x)\, f''(x)^2}{f'(x)^3} \\
&= \frac{m}{x-\alpha} \left(m - 1 + \frac{(m-1)\,(m-2)}{m} - 2\, \frac{(m-1)^2}{m} \right) \\
&= \frac{m}{x-\alpha}\, \frac{m-1}{m}\, \left(m + m - 2 - 2\,(m-1) \right),
\end{aligned}
$$

que al aplicar el límite $x \to \alpha$ nos dará una indeterminación $0/0$. Al resolver esta indeterminación, en general, obtendremos $g''(\alpha) \neq 0$, por lo que este método de Newton modificado converge cuadráticamente. Es decir, la adición del producto por m compensa al método de Newton para que recupere su segundo orden de convergencia, que había perdido debido a la presencia de la raíz múltiple.

De hecho, si la indeterminación se resuelve con $g''(\alpha) = 0$, algo excepcional por otro lado, se puede demostrar (aunque es engorroso y lo omitiremos aquí) que

$$
g'''(\alpha), \cdots, g^{(m-1)}(\alpha),
$$

tienen una indeterminación del mismo tipo $(0/(x-\alpha))$ y que

$$
g^{(m)} = \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{m\, A\, (x-\alpha)^{m-2}},
$$

que en el caso excepcional de que todas las indeterminaciones se resolviesen a 0, nos indicaría que el método de Newton modificado como mucho tiene orden m de convergencia.

3. Considere la iteración de Picard con relajación no estacionaria

$$
x_{n+1} = x_n - \mu\, f(x_n),
$$

donde $\mu = \mu(x_n, f(x_n), f'(x_n))$. ¿Cuando converge este método?

Solución. Este método iterativo con $g(x) = x - \mu\, f(x)$ corresponde a lo que podemos llamar un método de Picard con relajación. Las condiciones de convergencia de este método son las propias de todo método de punto fijo, la contractividad de la función $g(x)$, que no podemos verificar para f general pero que supondremos para un entorno suficientemente cercano a la raíz y la condición $|g'(x)| < 1$ en dicho entorno. Estudiemos esta última condición, suponiendo que $\mu \equiv \mu(x, f, f')$,

$$\begin{aligned} g' &= 1 - \mu\, f' - f \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial f}\, f' + \frac{\partial \mu}{\partial f'}\, f'' \right) \\ &= 1 - f\, \frac{\partial \mu}{\partial x} - f' \left(\mu + f\, \frac{\partial \mu}{\partial f} \right) - f\, f''\, \frac{\partial \mu}{\partial f'}, \end{aligned}$$

que será nulo sólo excepcionalmente y que convergerá $|g'| < 1$ bajo una expresión bastante complicada en las derivadas de f y μ.

Si para simplificar, tomamos $\mu \equiv \mu(f, f')$, $\partial\mu/\partial x = 0$, obtenemos

$$g' = 1 - f' \left(\mu + f\, \frac{\partial \mu}{\partial f} \right) - f\, f''\, \frac{\partial \mu}{\partial f'},$$

que sigue llevando a una expresión de gran complejidad.

Si para simplificar más aún tomamos $\mu \equiv \mu(f')$, $\partial\mu/\partial x = \partial\mu/\partial f = 0$,

$$g' = 1 - \mu\, f' - f\, f''\, \frac{d\mu}{df'},$$

que si $1 - \mu\, f' = 0$, es decir,

$$\mu = \frac{1}{f'}, \qquad \frac{d\mu}{df'} = -\frac{1}{f'^2},$$

entonces

$$g' = \frac{f\, f''}{f'^2},$$

que coincide con el método de Newton, que es de segundo orden de convergencia.

En general, el método obtenido sólo alcanzará convergencia de primer orden (convergencia lineal) y las condiciones para que el método realmente converja son difíciles de determinar para μ y f sin particularizar.

4. Suponga que se quieren calcular las raíces de $f(x) = 0$ mediante el siguiente método de Newton-Raphson modificado: Dada x_n calcule

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

que equivale a un método de Newton estándar en el que la derivada se re-calcula sólo cada dos pasos. Demuestre que este método converge cúbicamente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^3} \neq 0.$$

Solución. La ecuación del error para el método

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h(x_n), \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n, y_n),$$

toma la forma

$$e_{n+1} = \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n, y_n),$$

y como

$$g(x_n, y_n) = g(x_n, x_n) + \frac{\partial g}{\partial y}\,(y_n - x_n) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots,$$

donde

$$g(x_n, x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h(x_n),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_n, x_n) = 1 - \frac{f'(y)}{f'(x_n)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_n, x_n) = -\frac{f''(y)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)},$$

por lo que

$$g(x_n, y_n) = h(x_n) - \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots,$$

con lo que la ecuación para el error del método se escribe

$$e_{n+1} = \alpha - h(x_n) + \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\,(y_n - x_n)^2 + \cdots$$

Escribiendo la ecuación para el error

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \alpha - g(x_n, y_n) \\
&= \alpha - \bigg(g + \frac{\partial g}{\partial x}\,(x_n - \alpha) + \frac{\partial g}{\partial y}\,(y_n - \alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,(x_n - \alpha)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\,(x_n - \alpha)\,(y_n - \alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,(y_n - \alpha)^2 + \cdots \bigg)
\end{aligned}
$$

donde g y todas sus derivadas se evalúan en el punto (α, α). Realizando esta evaluación obtenemos (note que $f(\alpha) = 0$)

$$
g(\alpha, \alpha) = \left(y - \frac{f(y)}{f'(x)} \right)(\alpha, \alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \alpha) &= \left(\frac{f(y)\, f''(x)}{f'^2(x)} \right)(\alpha, \alpha) = \frac{f(\alpha)\, f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} = 0, \\
\frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \alpha) &= \left(1 - \frac{f'(y)}{f'(x)} \right)(\alpha, \alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\alpha, \alpha) &= \left(\frac{f'(y)\, f''(x)}{f'^2(x)} \right)(\alpha, \alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \alpha) &= \left(-\frac{2\, f(y)\, f''^2(x)}{f'^3(x)} \right)(\alpha, \alpha) = -\frac{2\, f(\alpha)\, f''^2(\alpha)}{f'^3(\alpha)} = 0, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha, \alpha) &= \left(-\frac{f''(y)}{f'(x)} \right)(\alpha, \alpha) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},
\end{aligned}
$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(x_n - \alpha)\,(y_n - \alpha) + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(y_n - \alpha)^2 + \cdots \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,(y_n - \alpha)\,\left(2\,(x_n - \alpha) - (y_n - \alpha)\right) + \cdots,
\end{aligned}
$$

y como

$$
y_n - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},
$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = 0,$$

Por otro lado,

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)\,(x_n-\alpha)} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(2-\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}\right)+\cdots,$$

y buscando un límite sólo en x_n,

$$y_n-\alpha = (x_n-\alpha)\,\left(1-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n-\alpha)}\right),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)\,(x_n-\alpha)} &= \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2\,\left(1-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n-\alpha)}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(2-\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}\right)+\cdots \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(1+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n-\alpha)}\right)+\cdots,
\end{aligned}$$

y

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\left(1-\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)\,(x_n-\alpha)}\right)^2\right)+\cdots,$$

pero aplicando límites mediante la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{f^2(x_n)}{f'^2(x_n)\,(x_n-\alpha)^2} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,f(x_n)\,f'(x_n)}{2\,f'(x_n)\,f''(x_n)\,(x_n-\alpha)^2+2\,f'2(x_n)\,(x_n-\alpha)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f''(x_n)\,(x_n-\alpha)^2+f'(x_n)\,(x_n-\alpha)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{f'''(x_n)\,(x_n-\alpha)^2+3\,f''(x_n)\,(x_n-\alpha)+f'(x_n)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{f'(x_n)} = 1,
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = 0,$$

lo que significa que la convergencia es mayor que cuadrática.

Para obtener el segundo límite podemos continuar por la misma línea, pero es larga. Tomaremos un camino más directo, que también permite determinar el primer límite, calcular $g'(\alpha)$, $g''(\alpha)$, $\ldots$; para ello vamos a estudiar dos pasos de la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} = g(x_n),$$

y donde, para simplificar, llamaremos

$$g(x) = x - \frac{f(x)+f(z)}{f'(x)}, \qquad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{df(z(x))}{dx} &= \frac{df(z)}{dz}\,\frac{dz(x)}{dx} = f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f}\,f' + \frac{\partial z}{\partial f'}\,f''\right) \\
&= f'(z)\left(1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f}{f'^2}\,f''\right) = f'(z)\left(\frac{f}{f'^2}\,f''\right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g'(\alpha) &= 1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f}{f'^2}\,f'' - f'(z)\,\frac{f\,f''}{f'^3} + \frac{f(z)}{f'^2}\,f'' \\
&= \frac{f\,f''}{f'^2} - f'(z)\,\frac{f\,f''}{f'^3} + f(z)\,\frac{f''}{f'^2} \\
&= 0, \qquad\qquad f(\alpha)=0, \qquad z(\alpha)=\alpha,
\end{aligned}$$

y la convergencia es al menos cuadrática. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g''(\alpha) = \frac{f'\,f''}{f'^2} &+ \frac{f\,f'''}{f'^2} - \frac{2\,f\,f''^2}{f'^3} - f''(z)\,\frac{f^2\,f''^2}{f'^5} \\
&- f'(z)\left(\frac{f''}{f'^2} + \frac{f\,f'''}{f'^3} - \frac{3\,f\,f''^2}{f'^4}\right) \\
&+ f'(z)\,\frac{f\,f''^2}{f'^4} + f(z)\left(\frac{f'''}{f'^3} - \frac{2\,f''^2}{f'^3}\right) \\
= \frac{f'\,f''}{f'^2} &- f'(z)\,\frac{f''}{f'^2} = 0,
\end{aligned}$$

con lo que la convergencia es al menos cúbica. Finalmente, un cálculo directo (hagalo) nos permite obtener

$$g'''(\alpha) = 3\,\frac{f''^2}{f'^2},$$

con lo que el método converge cúbicamente. Calculando la constante (razón) de convergencia, obtenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - \alpha &= g'(\alpha)\,(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}\,(x_n - \alpha)^2 \\ &\quad + \frac{g'''(\alpha)}{3!}\,(x_n - \alpha)^3 + O\Big((x_n - \alpha)^4\Big) \\ &= \frac{g'''(\alpha)}{3!}\,(x_n - \alpha)^3 + O\Big((x_n - \alpha)^4\Big), \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^3} = \frac{3}{3!}\,\frac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)} + O((x_n - \alpha))$$

y finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}.$$

5. Calcule el punto fijo y la tasa de orden de convergencia de la iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n \geq 0,$$

suponiendo que x_0 está cerca del punto fijo, donde

$$g(x) = \frac{x\,(x^2 + 3\,a)}{3\,x^2 + a}, \qquad a \geq 0.$$

Solución. El punto fijo α de esta iteración es

$$\alpha = g(\alpha) = \frac{\alpha\,(\alpha^2 + 3\,a)}{3\,\alpha^2 + a},$$

$$2\,\alpha^3 - 2\,a\,\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, \quad \alpha = \pm\sqrt{a}.$$

Ahora tenemos que estudiar la convergencia (y tasa de convergencia) para los tres puntos fijos que hemos obtenido. Como suponemos que

x_0 está próximo a α, para la convergencia, es necesario que $|g'(\alpha)| < 1$ (por la continuidad de g' existe un entorno de α tal que $|g'(x)| < 1$ en dicho entorno). Calculando la primera derivada

$$g'(x) = \frac{(3\,x^2 + 3\,a)\,(3\,x^2 + a) - (x^3 + 3\,a\,x)\,6\,x}{(3\,x^2 + a)^2} = \frac{3\,(a - x^2)^2}{(a + 3\,x^2)^2},$$

vemos que es una función par.

Para el punto fijo $\alpha = 0$, obtenemos

$$g'(0) = 3 > 1,$$

lo que indica que la iteración no converge a $\alpha = 0$ para x_0 cercano a α.

Para los puntos fijos $\alpha = \pm\sqrt{a}$, obtenemos

$$g'(\pm\sqrt{a}) = 0,$$

por lo que el método converge para x_0 suficientemente cercano a α. Para estudiar la tasa de convergencia necesitamos la segunda derivada

$$g''(x) = \frac{-36\,x\,(a - x^2)^2}{(a + 3\,x^2)^3} - \frac{12\,x\,\,(a - x^2)}{(a + 3\,x^2)^2} = \frac{48\,a\,x\,\,(-a + x^2)}{(a + 3\,x^2)^3},$$

que nos da $g''(\pm\sqrt{a}) = 0$. Ahora tenemos que estudiar la tercera derivada

$$\begin{aligned} g'''(x) &= \frac{-864\,a\,x^2\,\,(-a + x^2)}{(a + 3\,x^2)^4} + \frac{96\,a\,x^2}{(a + 3\,x^2)^3} + \frac{48\,a\,\,(-a + x^2)}{(a + 3\,x^2)^3} \\ &= -\frac{48\,a\,\,(a^2 - 18\,a\,x^2 + 9\,x^4)}{(a + 3\,x^2)^4}, \end{aligned}$$

con lo que

$$g'''(\pm\sqrt{a}) = \frac{3}{2\,a} \neq 0,$$

por lo que este método tiene orden de convergencia cúbica,

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^3} = \frac{g'''(\alpha)}{3!} + O((\alpha - x_n))\,.$$

para estos dos puntos fijos.

6. Calcule el cero de $f(x) = x - 0{,}2 \sin x - 0{,}5$, en el intervalo $[0{,}5, 1]$ con una exactitud de 6 cifras decimales en la mantisa por medio de los métodos

   a) bisección,

   b) regula falsi,

   c) Newton,

   d) secante,

   y determine los residuos para todos estos métodos

   Solución. Primero hemos de notar que la función $f(x)$ es monótona creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que su derivada es siempre positiva. Por tanto, si existe una raíz ésta es única. Por el teorema de Bolzano,

$$f(0{,}5) = -0{,}0958851, \qquad f(1) = 0{,}331706,$$

   la única raíz se encuentra en el intervalo considerado en el enunciado. Además debemos notar que una exactitud de 6 cifras decimales para un número en $[0{,}5, 1]$ requiere un error menor que $0{,}5 \times 10^{-6}$.

   a) Método de bisección. En el método de bisección llamaremos

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad E = \frac{|a-c|}{2},$$

   donde c es la bisección del intervalo y E es el error cometido tomando que la raíz está en el intervalo $[a, c]$ o $[c, b]$ según corresponda. Operando se obtiene la siguiente tabla

a	b	c	E	$f(c)$
0,5	1	0,75	0,13	0,11
0,5	0,75	0,625	0,063	0,0080
0,5	0,625	0,5625	0,031	$-0{,}044$
0,5625	0,625	0,59375	0,016	$-0{,}018$
0,59375	0,625	0,609375	0,0078	$-0{,}0051$
0,609375	0,625	0,617187	0,0039	0,0014
0,609375	0,617187	0,613281	0,0020	$-0{,}0018$
0,613281	0,617187	0,615234	0,00098	$-0{,}00020$
0,615234	0,617187	0,616211	0,00049	0,00062
0,615234	0,616211	0,615723	0,00024	0,00021
0,615234	0,615723	0,615479	0,00012	$8{,}66 \times 10^{-6}$
0,615234	0,615479	0,615356	0,000061	$-0{,}000093$
0,615356	0,615479	0,615417	0,000031	$-0{,}000042$
0,615417	0,615479	0,615448	0,000015	$-0{,}000017$
0,615448	0,615479	0,615463	$7{,}6 \times 10^{-6}$	$-4{,}1 \times 10^{-6}$
0,615463	0,615479	0,615471	$3{,}8 \times 10^{-6}$	$2{,}3 \times 10^{-6}$
0,615463	0,615471	0,615467	$1{,}9 \times 10^{-6}$	$-9{,}2 \times 10^{-7}$
0,615467	0,615471	0,615469	$9{,}5 \times 10^{-7}$	$6{,}8 \times 10^{-7}$
0,615467	0,615469	0,615468	$4{,}8 \times 10^{-7}$	$-1{,}2 \times 10^{-7}$

con lo que la raíz está en el intervalo $[0{,}615468, 0{,}615469]$ (tras 19 iteraciones) y podemos tomar como aproximación $x = 0{,}615468$ con un error menor que $0{,}48 \times 10^{-6}$.

b) Método regula falsi. Consiste en la iteración

$$c = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)},$$

y la elección de un nuevo intervalo según los signos de la función en estos tres puntos. Para determinar el final de la iteración podemos chequear la distancia entre dos aproximaciones a la raíz

$$E = |a - c|,$$

ya que como veremos, en este caso, el punto a queda fijo. Operando con una tabla del todo similar a la anterior obtenemos

a	b	c	E	$f(c)$
0,5	1.	0,612122	0,11	$-0{,}0028$
0,612122	1.	0,615368	0,0032	$-0{,}000084$
0,615368	1.	0,615465	0,000097	$-2{,}5 \times 10^{-6}$
0,615465	1.	0,615468	$2{,}9 \times 10^{-6}$	$-7{,}6 \times 10^{-8}$
0,615468	1.	0,615468	$8{,}8 \times 10^{-8}$	$-2{,}28 \times 10^{-9}$

con lo que la raíz es 0,615468 con seis dígitos de precisión.

c) Método de Newton. Consiste en la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - \frac{x - 0{,}2\,\sin(x) - 0{,}5}{1 - 0{,}2\,\cos(x)},$$

con lo que se obtiene la iteración

0,565719,	0,633106,	0,609100,	0,617754,
0,614646,	0,615764,	0,615362,	0,615506,
0,615454,	0,615473,	0,615466,	0,615469,
0,615468,	0,615468,		

con lo que la raíz es $x = 0{,}615468$.

d) Método de la secante. Consiste en la iteración

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x - \frac{x - 0{,}2\,\sin(x) - 0{,}5}{1 - 0{,}2\,\cos(x)},$$

con lo que se obtiene la iteración

0,750000,	1,000000,	0,619662,	0,615594,
0,615468,	0,615468,		

con lo que la raíz es $x = 0{,}615468$.

7. Para la iteración $x_{i+1} = \sqrt{2 + x_i}$ determine sus puntos fijos e intervalo de convergencia. Aplique 6 pasos de iteración funcional. Aplique la regla de la δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de dicha iteración.

Solución. Los puntos fijos de la iteración

$$\alpha = \sqrt{2+\alpha}, \qquad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0,$$

son $\alpha = \pm 2$. Para que la iteración converja ha de poderse calcular

$$\exists g(x) = \sqrt{2+x}, \qquad x > -2,$$

que cumpla

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \right| < 1, \qquad \frac{1}{4} < 2 + x,$$

luego $x > -7/4 > -2$, y, finalmente, como $g(x)$ es una función creciente, $g(-7/4) = -1/2$ y $\sqrt{2+x} \leq x$ cuando $|x| \gg 1$, entonces

$$g((-7/4, \infty)) = (-1/2, \infty) \subset (-7/4, \infty),$$

la convergencia al punto fijo $a = 2$ queda garantizada para valores iniciales $x_0 > -7/4 = -1{,}75$. El método no converge para el punto fijo $a = -2$.

Iterando 7 veces el método a partir de $x_0 = 0$, obtenemos

$$1{,}4142, \qquad 1{,}8478, \qquad 1{,}9616, \qquad 1{,}9904, \qquad 1{,}9976, \qquad 1{,}9994.$$

El método de la δ^2 de Aitken nos construye una nueva secuencia x_i' a partir de la secuencia calculada x_i. Si la secuencia original x_i se comporta asintóticamente como una sucesión geométrica, el método logra acelerar efectivamente su convergencia; en otros casos, puede que el método no acelere la convergencia. Vamos a construir la secuencia de Aitken

$$x_i' = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2\,x_{i+1} + x_i},$$

que nos permite obtener los 5 iterados

$$2{,}00208254, \qquad 2{,}00012537, \qquad 2{,}00000776, \qquad 2{,}00000048,$$

que obviamente convergen mucho más rápido que la sucesión original.

8. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1,$$

determine:

a) su número de raíces positivas,

b) su número de raíces negativas,

c) intervalos donde se encuentren cada una de sus raíces reales,

d) entornos donde se encuentran cada una de sus raíces complejas,

e) sus cuatro raíces mediante el método de Bairstow,

f) sus cuatro raíces mediante el método de Newton con deflación.

Solución. Para resolver este problema vamos a utilizar el método de las sucesiones de Sturm (que tiene como único defecto que sólo determina el número de raíces distintas). La sucesión de Sturm más simple es

$$p_1(x) = p(x), \qquad p_2(x) = -p'(x) = -4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 1,$$

$$p_i = \mathrm{mod} p_{i-2}(x), p_{i-1}(x),$$

que se obtiene fácilmente utilizando el algoritmo de Euclides de división de polinomios, dando

$$16\,p_1(x) = (1 - 4\,x)\,p_2(x) \underbrace{-11\,x^2 + 10\,x - 15}_{p_3(x)},$$

$$121\,p_2(x) = (44\,x + 7)\,p_3(x) \underbrace{+832\,x - 16}_{p_4(x)},$$

$$43264\,p_3(x) = (509 - 572\,x)\,p_2(x) \underbrace{-640816}_{p_5(x)},$$

con lo que obtenemos la tabla de signos

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	total
$-\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
-1	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
2	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3

que nos indica que existen 2 raíces reales distintas, una de ellas (negativa) en $[-1, -2]$ y la otra (positiva) en $[1, 2]$.

Aplicando el criterio de los signos de Descartes obtenemos que hay tres cambios de signo v_p y por tanto el número de raíces positivas n_p cumple que $v_p - n_p \in \{0, 2, 4\}$, luego o hay 1 raíz positiva o hay tres. En cuanto al número de raíces negativas, aplicando Descartes a $q(x) = p(-x)$, obtenemos $v_q = 1$ y por tanto $v_q - n_q \in \{0, 2, 4\}$, hay exactamente una raíz negativa.

Aplicando el criterio de Cauchy que dice que las raíces (complejas o reales) están incluidas en el disco de radio

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Para $p(x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota superior $|x_i| < 2$. Para $p(1/x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota inferior $|x_i| > 1/2$. Como sabemos por el criterio de Descartes que hay una raíz negativa, esta estará en el intervalo $[-2, -1/2]$. La raíz, o las tres, reales positivas del polinomio estarán en el intervalo $[1/2, 2]$.

a) Hay una raíz (real) positiva (Sturm).

b) Hay una raíz (real) negativa (Descartes o Sturm).

c) La raíz positiva está en $[1, 2]$ (Sturm) y la negativa en $[-2, -1]$ (Sturm).

d) Hay un par de raíces complejas conjugadas de parte real en $[1/2, 2]$ y de parte imaginaria en $[0, 2]$ y $[-2, 0]$, respectivamente (Cauchy).

e) El algoritmo de Bairstow consiste en dividir el polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entre el factor cuadrático $c(u, v) = z^2 - uz - v$, obteniendo

$$p(z) = (b_n z^{n-2} + b_{n-1} z^{n-3} + \cdots + b_3 z + b_2)\, c(u, v) + b_1(z - u) + b_0,$$

donde comparando coeficientes ($b_{n+1} = b_{n+2} = 0$)

$$b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}, \qquad k = n, n-1, \ldots, 0. \tag{1}$$

La división será exacta si $b_0 = b_1 = 0$, por lo que resolveremos las ecuaciones

$$b_0(u, v) = 0, \qquad b_1(u, v) = 0,$$

mediante el método de Newton. Definiendo las derivadas que aparecen en el Jacobiano y calculándolas derivando la relación de recurrencia (1),

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} = b_{k+1} + u\, c_{k+1} + v\, c_{k+2}, \qquad (c_{n+1} = c_n = 0),$$

$$d_k = \frac{\partial b_{k-1}}{\partial v} = b_{k+1} + u\, d_{k+1} + v\, d_{k+2} = c_{k-1}, \qquad (d_{n+1} = d_n = 0),$$

obtenemos la siguiente iteración de Newton en formulación delta

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}, \qquad \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_0(u,v) \\ b_1(u,v) \end{pmatrix},$$

cuya solución se escribe directamente

$$\delta u = \frac{c_1 b_1 - c_2 b_0}{J}, \qquad \delta v = \frac{c_1 b_0 - c_0 b_1}{J}, \qquad J = c_0 c_2 - c_1^2.$$

Tomando como condición inicial

$$z^2 - uz + v = (z - 1{,}5)(z + 1{,}5), \qquad u = 0, \quad v = -2{,}25,$$

e iterando el método, obtenemos (note que $b_4 = c_3 = 1, c_4 = 0$)

b_0	b_1	b_2	b_3	c_0	c_1	c_2	u	v	Iter
6,31	3,25	−3,25	−1	5,5	−5,5	−1	0,32	−0,78	1
0,84	0,88	−2,00	−0,68	0,22	−2,89	−0,35	0,59	−0,47	2
−0,0937	0,183	−1,71	−0,41	−1,12	−2,07	0,18	0,67	−0,56	3
−0,0177	−0,00874	−1,78	−0,329	−1,61	−2,10	0,341	0,666	−0,561	4
$1{,}94 \cdot 10^{-5}$	$6{,}98 \cdot 10^{-5}$	−1,78	−0,334	−1,60	−2,12	0,332	0,666	−0,561	5

y como b_0 y b_1 son prácticamente cero, podemos calcular dos de las raíces

$$q(z) = z^2 - 0{,}666\, z + 0{,}561 = 0, \qquad z_c = 0{,}333 \pm 0{,}671\mathrm{i},$$

y aplicando deflacción,

$$p(z) = (-1{,}783 - 0{,}334 z + z^2)\, q(z), \qquad z_- = -1{,}179, \quad z_+ = 1{,}513.$$

f) Lo primero que hay que hacer es estudiar la convergencia del método de Newton

$$g(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \qquad g'(z) = 2 - \frac{p(z)\,p''(z)}{p'(z)^2},$$

$$g'(z) = \frac{2\,z\,(-6 + 6\,z + 10\,z^2 - 3\,z^3 - 15\,z^4 + 10\,z^5)}{(1 - 2\,z - 3\,z^2 + 4\,z^3)^2},$$

y evaluando esta expresión en cualquiera de las raíces, es decir, sustituyendo z^4 por $r(z) = z^3 + z^2 - z + 1$, z^5 por $zr(z)$ y z^6 por $zr(z)$, de forma reiterada y simplificando, obtenemos que

$$g'(z) = 2 > 1, \qquad z \in z_-, z_+, z_c,$$

luego el método de Newton diverge para todas las raíces y no existe un entorno suficientemente pequeño que garantice su convergencia. El alumno puede comprobarlo numéricamente si así lo desea.

9. Calcule los ceros de $x^7 - 1 = 0$ mediante el método de Newton aplicado al sistema de dos ecuaciones con dos incógnicas que se obtiene para $x = a + \imath b$. Determine estimaciones iniciales de las raíces que garanticen la convergencia del método e itere el método hasta obtener 3 dígitos de precisión adicionales a los de sus estimaciones iniciales.

Solución. Las 7 raíces de esta ecuación son números complejos (raíces 7-ésimas de la unidad). Para obtenerlas podemos utilizar un método para raíces reales para los dos sistemas de ecuaciones que se obtienen para la parte real y para la imaginaria, independientemente,

$$(a + \mathrm{i}\,b)^7 = 0,$$

$$a^7 - 21 * a^5 * b^2 + 35 * a^3 * b^4 - 7 * a * b^6 = 0,$$
$$7 * a^6 * b - 35 * a^4 * b^3 + 21 * a^2 * b^5 - b^7 = 0,$$

es decir, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene siete soluciones.

10. Calcule los ceros de $\sin^6 z - 1 = 0$ mediante el método de Newton aplicado al sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnicas que se obtiene para $x = a + \imath b$. Utilice una formulación delta para el método de Newton y aplique un método de Gauss-Seidel con relajación para resolver las ecuaciones en dicha formulación. Determine estimaciones iniciales de las raíces que garanticen la convergencia del método e itere el método hasta obtener 3 dígitos de precisión adicionales a los de sus estimaciones iniciales.