Ejercicios del tema de interpolación y aproximación.

1. Aproxime la función e^x

   a) linealmente por $y = a\,x + b$, cerca de $x = 0$;

   b) racionalmente por $y = \frac{a\,x+b}{x+c}$, cerca de $x = 0$.

   Solución.

   a) Para aproximar e^x cerca de $x = 0$ por una recta $y = a\,x + b$ podemos usar el teorema (de aproximación local) de Taylor, y calcular
   $$f(0) = 1 = b, \qquad f'(0) = 1 = a,$$
   para obtener $y = 1 + x$.

   b) Para aproximar e^x cerca de $x = 0$ racionalmente por $y = \frac{a\,x+b}{x+c}$, tenemos que determinar tres constantes libres, por lo que usaremos las tres condiciones
   $$f(0) = 1 = \frac{b}{c},$$
   $$f'(0) = 1 = \left.\frac{a\,(x+c) - (a\,x+b)}{(x+c)^2}\right|_{x=0} = \frac{a\,c - b}{c^2},$$
   $$f''(0) = 1 = \left.\frac{2\,(b - a\,c)}{(x+c)^3}\right|_{x=0} = \frac{2\,(b - a\,c)}{c^3},$$
   y sustituyendo la segunda ecuación en la tercera
   $$1 = -\frac{2}{c}, \qquad c = -2 = b,$$
   $$a = \frac{c^2 + b}{c} = -1,$$
   con lo que hemos obtenido la aproximación racional
   $$y(x) = \frac{x+2}{2-x}.$$

También podemos obtener el mismo resultado desarrollando en serie de Taylor (si $c \neq 0$)

$$y = \frac{1}{c}\,\frac{a\,x+b}{1+\frac{x}{c}} = \frac{1}{c}\,(a\,x+b)\,\left(1-\frac{x}{c}+\left(\frac{x}{c}\right)^2+\cdots\right)$$
$$= \frac{b}{c}+\frac{(a\,c-b)\;x}{c^2}+\frac{(b-a\,c)\;x^2}{c^3}+\cdots,$$

y con comparando con el desarrollo de la exponencial

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots.$$

2. Un funcional es una “función de funcionesçon valores reales,

$$F : \mathrm{C}^n(a,b) \ni f(x) \longmapsto F(f(x)) \in \mathbb{R},$$

por ejemplo,

$$F(f) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} w_{ij}\,\frac{d^j f}{dx^j}(x_{ij}),$$

donde $x_{ij} \in (a,b)$ son puntos fijados y w_{ij} son “pesos”para determinar. Podemos aproximar cualquier funcional $G(f)$ por un funcional de la forma anterior $F(f)$,

$$G(f) = F(f) + E(f),$$

donde $E(f)$ es el funcional del error. Para determinar los pesos, y por analogía con el desarrollo en serie de Taylor que es exacto para polinomios, podemos imponer la condición de que el error sea nulo para todos los polinomios de grado menor o igual que

$$N = \sum_{j=0}^{n} m_j - 1.$$

Como el funcional F es lineal ($F(a\,f+b\,g) = a\,F(f)+b\,F(g)$) y un polinomio no es más que una combinación lineal de monomios x^k, basta probar que

$$E(x^k) = 0, \qquad G(x^k) = F(x^k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} w_{ij}\,\frac{d^j x^k}{dx^j}(x_{ij}),$$

para $k \leq N$. Dados $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$, desarrolle un método como el indicado más arriba y aproxime o calcule los valores aproximados de los siguientes funcionales

$$F_1 : \mathrm{C}^0[a,b] \ni f \longmapsto F(f) = f(\frac{a+b}{2}) \in \mathbb{R},$$

$$F_2 : \mathcal{L}^1(a,b) \ni f \longmapsto F(f) = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

<u>Solución</u>. Dados los valores $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$ quiere decir que los puntos x_{ij} a considerar son

$$x_{10} = a, \quad x_{11} = a, \quad x_{20} = b, \quad x_{21} = b,$$

y $N = 4 - 1 = 3$.

a) Vamos a aproximar

$$G(f) = f(\frac{a+b}{2}),$$

por

$$F(f) = w_{10}\, f(x_{10}) + w_{11}\, f'(x_{11}) + w_{20}\, f(x_{20}) + w_{21}\, f'(x_{21}),$$

de tal forma que sea exacto para todos los polinomios cúbicos

$$G(x^k) = F(x^k), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones lineales

$$w_{10}\, 1 + w_{11}\, 0 + w_{20}\, 1 + w_{21}\, 0 = 1,$$

$$w_{10}\, a + w_{11}\, 1 + w_{20}\, b + w_{21}\, 1 = \frac{a+b}{2},$$

$$w_{10}\, a^2 + w_{11}\, 2\, a + w_{20}\, b^2 + w_{21}\, 2\, b^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$w_{10}\, a^3 + w_{11}\, 3\, a^2 + w_{20}\, b^3 + w_{21}\, 3\, b^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

que se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & b & 1 \\ a^2 & 2\,a & b^2 & 2\,b \\ a^3 & 3\,a^2 & b^3 & 3\,b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{11} \\ w_{20} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (a+b)/2 \\ (a+b)^2/4 \\ (a+b)^3/8 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema de cuatro ecuaciones lineales, cuyos detalles omitimos, es

$$w_{10} = \frac{1}{2}, \quad w_{11} = \frac{b-a}{8}, \quad w_{20} = \frac{1}{2}, \quad w_{21} = \frac{a-b}{8},$$

y el funcional toma la forma

$$f(\frac{a+b}{2}) \approx \frac{1}{2}\,(f(a)+f(b)) + \frac{b-a}{8}\,(f'(a)-f'(b)).$$

b) De forma del todo similar, para aproximar la integral

$$G(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

mediante el funcional

$$F(f) = w_{10}\,f(x_{10}) + w_{11}\,f'(x_{11}) + w_{20}\,f(x_{20}) + w_{21}\,f'(x_{21}),$$

de tal forma que sea exacto para todos los polinomios cúbicos

$$F(x^k) = G(x^k) = \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}, \qquad k = 0,1,2,3,$$

tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & b & 1 \\ a^2 & 2\,a & b^2 & 2\,b \\ a^3 & 3\,a^2 & b^3 & 3\,b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{11} \\ w_{20} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ (b^3-a^3)/3 \\ (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix},$$

cuya solución es

$$w_{10} = \frac{b-a}{2}, \quad w_{11} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad w_{20} = \frac{b-a}{2}, \quad w_{21} = -\frac{(b-a)^2}{12},$$

y el funcional toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}\,(f'(a)-f'(b)).$$

3. Una función $f(x)$ se pretende aproximar racionalmente por

$$R_{mn}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

donde

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i, \qquad Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i,$$

tal que

$$R_{mn}(x_j) = f(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

a) ¿Cuál es la relación entre m, n y s?

b) Para $x_j = 0, 1, 2$; $f(x_j) = 1, 3, 3$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$?

c) Para $x_j = 0, 2, 3$; $f(x_j) = -1, 1, 1/2$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$? Indique algunas propiedades relativas a la continuidad $R_{mn}(x)$.

Solución.

a) Escribiendo

$$R_{mn}(x) = \frac{a_0}{b_0}\, \frac{1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{a_0}\, x^i}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_0}\, x^i},$$

obtenemos como incógnitas a_0/b_0, a_i/a_0, $i = 1, 2, \ldots, m$ y b_i/b_0, $i = 1, 2, \ldots, n$, con lo que la relación requerida es

$$s = m + n + 1.$$

b) Queremos calcular

$$R_{11}(x) = \alpha\, \frac{1 + \beta\, x}{1 + \gamma\, x},$$

sabiendo que $R_{11}(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_j = 0, 1, 2$ donde $f(x_j) = 1, 3, 3$; estas condiciones nos permiten obtener las ecuaciones

$$f(0) = 1 = R_{11}(0) = \alpha,$$

$$f(1) = 3 = R_{11}(1) = \frac{1 + \beta}{1 + \gamma},$$

$$f(2) = 3 = R_{11}(2) = \frac{1 + 2\,\beta}{1 + 2\,\gamma},$$

que se pueden escribir

$$\beta = 2 + 3\,\gamma, \qquad 5 + 6\,\gamma = 3 + 6\,\gamma,$$

con lo que resulta $5 = 3$, que es falso, por lo que no existe ninguna aproximación racional que cumpla los requisitos indicados.

c) Escribiendo

$$R_{11}(x) = \alpha\,\frac{1 + \beta\,x}{1 + \gamma\,x},$$

sabiendo que $R_{11}(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_j = 0, 2, 3$ con $f(x_j) = -1, 1, 1/2$; estas condiciones nos permiten obtener las ecuaciones

$$f(0) = -1 = R_{11}(0) = \alpha,$$

$$f(2) = 1 = R_{11}(2) = -\frac{1 + 2\,\beta}{1 + 2\,\gamma},$$

$$f(3) = \frac{1}{2} = R_{11}(3) = -\frac{1 + 3\,\beta}{1 + 3\,\gamma},$$

que se pueden escribir

$$\beta + \gamma + 1 = 0, \qquad 2\,\beta + \gamma + 1 = 0,$$

cuya solución es $\beta = 0$ y $\gamma = -1$, es decir,

$$R_{11}(x) = \frac{-1}{1 - x} = \frac{1}{x - 1},$$

que como vemos no está definida en $x = 1$ y por tanto no es ni continua ni, por supuesto, diferenciable en el punto $x = 1$.

4. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 2 tal que

$$p(x_0) = y_0, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_1) = y'_1.$$

Solución. Escribiendo el polinomio en la forma de Taylor

$$p(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2, \qquad p'(x) = a_1 + 2\,a_2\,(x - x_0),$$

y aplicando las condiciones de interpolación del enunciado, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&p(x_0) = a_0 = y_0,\\
&p'(x_0) = a_1 = y_0',\\
&p'(x_1) = y_0' + 2\,a_2\,(x_1 - x_0) = y_1',
\end{aligned}$$

con lo que

$$p(x) = y_0 + y_0'\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\,\frac{y_1' - y_0'}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)^2.$$

5. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad p'(x_0) = y_0', \qquad p'(x_2) = y_2',$$

donde $x_i = x_0 + i\,h$ e y_i, y_0', y_2' son dadas.

Solución. Escribiendo el polinomio en la forma de Newton

$$\begin{aligned}
p(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + a_3\,(x - x_0)^2\,(x - x_1)\\
+ a_3\,(x - x_0)^2\,(x - x_1)\,(x - x_2),
\end{aligned}$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned}
p'(x) = a_1 + 2\,a_2\,(x - x_0)^2 + a_3\,\Big(2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + (x - x_0)^2\Big)\\
+ a_3\,\Big(2\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) + (x - x_0)^2\,(x - x_2)\\
+(x - x_0)^2\,(x - x_1)\Big),
\end{aligned}$$

y aplicando las condiciones de interpolación del enunciado

$$\begin{aligned}
&p(x_0) = a_0 = y_0,\\
&p'(x_0) = a_1 = y_0',\\
&p(x_1) = y_0 + y_0'\,(x_1 - x_0) + a_2\,(x_1 - x_0)^2 = y_1,\\
&p(x_2) = y_0 + y_0'\,2\,h + a_2\,4\,h^2 + a_3\,4\,h^2\,h = y_2,\\
&p'(x_2) = y_0' + a_2\,4\,h + a_3\,(4\,h^2 + 4\,h^2) + a_4\,4\,h^3 = y_2',
\end{aligned}$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{y_1 - y_0 - y_0' \, h}{h^2}, \\
a_3 &= \frac{y_2 - y_0 - 2\,h\,y_0' - 4\,(y_1 - y_0 - h\,y_0')}{4\,h^3} = \frac{y_2 + 3\,y_0 - 4\,y_1 + 2\,h\,y_0'}{4\,h^3}, \\
a_4 &= \frac{y_2' - y_0' - 4\,h\,a_2 - 8\,h^2\,a_3}{4\,h^3} = \frac{4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2 + h\,(y_1' - 4\,y_0')}{4\,h^4}.
\end{aligned}
$$

6. Considere la función racional

$$
p(x) = \frac{a + b\,x}{1 + c\,x},
$$

que satisface $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. ¿Exista tal función $p(x)$?

Solución. Las condiciones de interpolación del enunciado equivalen a las ecuaciones lineales

$$
p(x_i) = \frac{a + b\,x_i}{1 + c\,x_i} = y_i, \qquad a + b\,x_i = y_i + c\,x_i\,y_i, \qquad i = 1, 2, 3.
$$

Estas ecuaciones se pueden escribir

$$
\begin{pmatrix} 1 & x_1 & -x_1\,y_1 \\ 1 & x_2 & -x_2\,y_2 \\ 1 & x_3 & -x_3\,y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},
$$

que tendrá solución única si el determinante

$$
\begin{vmatrix} 1 & x_1 & -x_1\,y_1 \\ 1 & x_2 & -x_2\,y_2 \\ 1 & x_3 & -x_3\,y_3 \end{vmatrix} \neq 0,
$$

que es la condición

$$
x_1\,y_1\,(x_2 - x_3) + x_2\,y_2\,(x_3 - x_1) + x_3\,y_3\,(x_1 - x_2) \neq 0,
$$

que se tiene que dar para que exista el interpolante $p(x)$. Note que esta condición es equivalente a $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, supuesto en el enunciado, luego el resultado siempre se da.

7. Sea $p_2(x)$ un polinomio cuadrático que interpola la función $f(x)$ en los puntos x_0, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$; ¿cuál es el error de $f'(x_i) - p_2'(x_i)$, $i = 0, 1, 2$? Suponga que $f \in \mathrm{C}^3[x_0, x_2]$ y calcule cotas para estos errores.

Solución. El polinomio cuadrático interpolador de Newton es

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1),$$

donde como sabemos

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h},$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2\,h} = \frac{f(x_2) - 2\,f(x_1) + f(x_0)}{2\,h^2},$$

y por tanto su derivada es

$$p_2'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(2\,x - x_0 - x_1).$$

La fórmula de representación del error de interpolación es

$$EI(x) = f(x) - p_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]\,(\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2),$$

y por tanto la fórmula para el error de interpolación de la derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{dEI(x)}{dx} &= f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]\;((\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2) + (\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_2) \\
&\qquad + (\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)) \\
&= f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]\;((\bar{x} - x_2)\,(2\,\bar{x} - x_0 - x_1) \\
&\qquad + (\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1))\,,
\end{aligned}$$

que aplicando normas nos conduce a

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{dEI(x)}{dx}\right\|_\infty &= \max_{x_0 \le \bar{x} \le x_1} |f[x_0, x_1, x_2, \bar{x}]\;((\bar{x} - x_2)\,(2\,\bar{x} - x_0 - x_1) \\
&\qquad + (\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1))| \\
&= \max_{x_0 \le \xi, \bar{x} \le x_1} \left|\frac{1}{3!}\,\frac{d^3 f(\xi)}{dx^3}\right|\,|(\bar{x} - x_2)\,(2\,\bar{x} - x_0 - x_1) \\
&\qquad + (\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)|\,,
\end{aligned}$$

y definiendo

$$F(x) = (x - x_2)\,(2\,x - x_0 - x_1) + (x - x_0)\,(x - x_1),$$

obtenemos fácilmente

$$F(x_2) = 2\,h^2, \qquad F(x_1) = -h^2, \qquad F(x_0) = 2\,h^2,$$

y además buscando sus extremos relativos

$$\frac{dF}{dx} = 2\,x - x_0 - x_1 + 2\,(x - x_2) + x - x_1 + x - x_0 = 6\,x - 2\,x_0 - 2\,x_1 - 2\,x_2 = 0,$$

obtenemos el único extremo en

$$x = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3},$$

donde

$$F(\frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}) = -\frac{h^2}{9},$$

por ello encontramos la siguiente cota para el error en la derivada

$$\left\| \frac{dEI(x)}{dx} \right\|_\infty = \frac{2\,h^2}{3!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_1} \left| \frac{d^3 f(\xi)}{dx^3} \right| = \frac{h^2}{3} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_1} \left| \frac{d^3 f(\xi)}{dx^3} \right|.$$

8. Dados los valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, el polinomio interpolador puede usarse para determinar los ceros de la función $f(x) = 0$. Por ejemplo, los métodos de regula falsi y de Müller se basan en este procedimiento. Utilice la interpolación para determinar la función inversa $x(f)$ y los ceros de la función f. Determine los errores de interpolación que comete.

   Solución. Dada una tabla $\{x_i, f(x_i)\}$ podemos calcular fácilmente la inversa interpolando la tabla $\{f(x_i), x_i\}$, que nos conduce al siguiente polinomio interpolador de Lagrange para la inversa

$$x(f) \approx p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\, l_k(f),$$

   donde los polinomios base de Lagrange son

$$l_k(f) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{f - f(x_i)}{f(x_k) - f(x_i)}.$$

Por otro lado, para calcular los ceros de f, es decir, los x tales que $f(x) = 0$, podemos aproximar $x(f)$ por su polinomio interpolador y operar de la forma

$$x(0) \approx p(0) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \, l_k(0),$$

donde

$$l_k(0) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n-1} \frac{-f(x_i)}{f(x_k) - f(x_i)}.$$

9. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

   Solución. Los polinomios de Legendre $L_i(x)$ son ortogonales respecto al producto interno en L_2, es decir,

$$\langle L_i, L_j \rangle = \int_{-1}^{1} L_i(x) \, L_j(x) \, dx = 0, \qquad i \neq j,$$

   donde $L_n(x)$ satisface la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \, \frac{dy}{dx} \right) + n \, (n + 1) \, y = 0.$$

   Los polinomios toman la forma estándar

$$L_0(x) = a_0,$$

$$L_1(x) = b_1 \, x + b_0,$$

$$L_2(x) = c_2 \, x^2 + c_1 \, x + c_0,$$

   cuyos coeficientes deben cumplir las ecuaciones que se obtienen de aplicar las condiciones de ortogonalidad y de ortonormalidad

$$\langle L_0, L_0 \rangle = a_0^2 \int_{-1}^{1} dx = 2 \, a_0^2 = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\langle L_0, L_1 \rangle = a_0 \left(b_1 \int_{-1}^{1} x \, dx + b_0 \int_{-1}^{1} dx \right) = 2 \, a_0 \, b_0 = 0,$$

$$b_0 = 0,$$

$$\langle L_1, L_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(b_1^2\, x^2 + 2\, b_0\, b_1\, x + b_0^2 \right)\, dx = \frac{2}{3}\, b_1^2 + 2\, b_0^2 = \frac{2}{3}\, b_1^2 = 1,$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$\langle L_0, L_2 \rangle = a_0 \int_{-1}^{1} \left(c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 \right)\, dx = a_0\, \left(\frac{2}{3}\, c_2 + 2\, c_0 \right) = 0,$$

$$c_0 = -\frac{c_2}{3},$$

$$\langle L_1, L_2 \rangle = b_1 \int_{-1}^{1} \left(c_2\, x^3 + c_1\, x^2 + c_0\, x \right)\, dx + b_0 \int_{-1}^{1} \left(c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 \right)\, dx$$

$$= b_1\, \frac{2}{3}\, c_1 + b_0\, \left(\frac{2}{3}\, c_2 + 2\, c_0 \right) = b_1\, \frac{2}{3}\, c_1 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

$$\langle L_2, L_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(c_2^2\, x^4 + 2\, c_2\, c_0\, x^2 + c_0^2 \right)\, dx = \frac{2}{5}\, c_2^2 + \frac{4}{3}\, c_2\, c_0 + 2\, c_0^2 = \frac{8}{45}\, c_2^2 = 1,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{45}{8}} = \frac{3}{2}\, \sqrt{5}2,$$

$$c_0 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{1}{2}\, \sqrt{5}2;$$

con lo que obtenemos finalmente

$$L_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}\, x,$$

$$L_2(x) = \frac{3\, \sqrt{10}}{4}\, \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

10. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

Solución. De los resultados del problema anterior, si no aplicamos la condición de ortonormalidad, obtenemos los siguientes polinomios ortogonales de Legendre

$$L_0(x) = a_0,$$

$$L_1(x) = b_1\, x,$$

$$L_2(x) = c_2 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right),$$

y aplicando la condición de normalización del enunciado

$$L_0(1) = 1 = a_0,$$

$$L_1(1) = 1 = b_1,$$

$$L_2(1) = 1 = c_2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}\, c_2,$$

obtenemos los siguientes polinomios de Legendre

$$l_0(x) = 1,$$

$$l_1(x) = x,$$

$$l_2(x) = \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(3\, x^2 - 1 \right).$$

Obviamente, estos polinomios son proporcionales a los del enunciado anterior.

11. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.

Solución. Los polinomios de Chebyshev $T_i(x)$ son ortogonales respecto al producto interno con peso $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$, es decir,

$$\langle L_i, L_j \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{L_i(x)\, L_j(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 0, \qquad i \neq j,$$

donde $T_n(x)$ satisface la ecuación de Chebyshev

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, y = 0.$$

Los polinomios toman la forma estándar

$$T_0(x) = a_0,$$

$$T_1(x) = b_1\, x + b_0,$$

$$T_2(x) = c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0,$$

cuyos coeficientes deben cumplir las ecuaciones que se obtienen de aplicar las condiciones de ortogonalidad y de ortonormalidad

$$\langle T_0, T_0\rangle_w = a_0^2 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = a_0^2 \int_{\pi}^{0} \frac{d(\cos\theta)}{\sin\theta} = \pi\, a_0^2 = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

$$\langle T_0, T_1\rangle_w = a_0\, b_1 \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + a_0\, b_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\, a_0\, b_0 = 0,$$

$$b_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}\langle T_1, T_1\rangle_w &= b_1^2 \int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = b_1^2 \int_{\pi}^{0} \frac{\cos^2\theta\, d(\cos\theta)}{\sin\theta} = b_1^2 \int_{0}^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\ &= b_1^2 \int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2\,\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\, b_1^2 = 1\end{aligned}$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

$$\begin{aligned}\langle T_0, T_2\rangle_w &= a_0\, c_2 \int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + a_0\, c_1 \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + a_0\, c_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= a_0\, c_2\, \frac{\pi}{2} + a_0\, c_0\, \pi = a_0\, \pi \left(\frac{c_2}{2} + c_0\right),\end{aligned}$$

$$c_0 = -\frac{c_2}{2},$$

$$\begin{aligned}\langle T_1, T_2\rangle_w &= b_1\, c_2 \int_{-1}^{1} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + b_1\, c_1 \int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + b_1\, c_0 \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad + b_0\, c_2 \int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + b_0\, c_1 \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + b_0\, c_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= b_1\, c_1\, \frac{\pi}{2} + b_0\, c_2\, \frac{\pi}{2} + b_0\, c_0\, \pi = b_1\, c_1\, \frac{\pi}{2} = 0,\end{aligned}$$

$$c_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle T_2, T_2\rangle_w &= \int_{-1}^{1} \frac{c_2^2\, x^4 + 2\, c_2\, c_0\, x^2 + c_0^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= c_0^2\, \frac{\pi}{2} + 2\, c_2\, c_0\, \frac{\pi}{2} + c_2^2 \int_{\pi}^{0} \frac{\cos^4\theta\, d(\cos\theta)}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^4\theta\, d\theta &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2\,\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{1+2\, \cos 2\,\theta + \cos^2 2\,\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos^2 2\,\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1+\cos 4\,\theta)\; d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\,\pi}{8},
\end{aligned}$$

luego obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle T_2, T_2\rangle_w &= \int_{-1}^{1} \frac{c_2^2\, x^4 + 2\, c_2\, c_0\, x^2 + c_0^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= c_0^2\, \frac{\pi}{2} + 2\, c_2\, c_0\, \frac{\pi}{2} + c_2^2\, \frac{3\,\pi}{8} = c_2^2\, \pi \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = c_2^2\, \frac{\pi}{8} = 1,
\end{aligned}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

Con lo que obtenemos finalmente

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$T_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x,$$

$$T_2(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right).$$

12. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.

Solución. De la aplicación de la condición de ortogonalidad en el problema anterior hemos obtenido

$$T_0 = a_0, \qquad T_1 = b_1\, x, \qquad T_2 = c_2 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right).$$

La condición de normalización de nuestro enunciado nos permite obtener

$$T_0(1) = 1 = a_0,$$
$$T_1(1) = 1 = b_1,$$
$$T_2(1) = 1 = \frac{c_2}{2}, \qquad c_2 = 2,$$

luego los polinomios normalizados de esta forma son

$$t_0 = 1, \qquad t_1 = x, \qquad t_2 = 2\, x^2 - 1.$$

13. Calcule el polinomio de grado ≤ 3 tal que minimiza

$$\int_{-1}^{1} (e^x - p(x))^2 \; dx.$$

Solución. El problema es equivalente a encontrar la aproximación minimax para la norma L_2 (es decir, $w(x) = 1$) en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, aproximar mediante polinomios ortogonales de Legendre. De esta forma

$$\text{mín} \int_{-1}^{1} (e^x - p(x))^2 \; dx = \text{mín} \int_{-1}^{1} \left(e^x - \sum_{i=0}^{n=3} \alpha_i\, L_i(x) \right)^2 \; dx,$$

se cumple para

$$\alpha_i = \frac{\langle e^x, L_i \rangle}{\langle L_i, L_i \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} e^x\, L_i\, dx}{\int_{-1}^{1} L_i^2\, dx}.$$

Los tres primeros polinomios de Legendre (con la condición $L_i(1) = 1$) se pueden calcular fácilmente como en el ejercicio 12, y son

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = x, \qquad L_2(x) = \frac{3}{2}\, x^2 - \frac{1}{2},$$

$$L_3(x) = \frac{5}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x.$$

De esta forma, operando, obtenemos fácilmente

$$\alpha_0 = \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} e^x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{e - 1/e}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2\,e};$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle e^x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx}{\int_{-1}^{1} x\,dx} = \frac{x\,e^x - e^x]_{-1}^{1}}{2/3} = \frac{2/e}{2/3} = \frac{3}{e};$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\langle e^x, (3\,x^2-1)/2\rangle}{\langle (3\,x^2-1)/2, (3\,x^2-1)/2\rangle} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3\,x^2-1)\,e^x\,dx}{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9\,x^4-6\,x^2+1)\,dx} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(3\,x^2\,e^x]_{-1}^{1} - 6\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx - \int_{-1}^{1} e^x\,dx\right)}{\frac{1}{4}\left(2 - 2\cdot 2 + \frac{9\cdot 2}{5}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\,(3\,e - 3/e - 12/e - e + 1/e)}{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5} - 1\right)} \\
&= \frac{e - 7/e}{2/5} = \frac{5\,(e^2-7)}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{\langle e^x, (5\,x^3-3\,x)/2\rangle}{\langle (5\,x^3-3\,x)/2, (5\,x^3-3\,x)/2\rangle} = \frac{\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,e^x\,dx - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx}{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(25\,x^6-30\,x^4+9\,x^2)\,dx} \\
&= \frac{\frac{5}{2}\left(x^3\,e^x]_{-1}^{1} - 3\int_{-1}^{1} x^2\,e^x\,dx\right) - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx}{\frac{1}{4}\left(\frac{25}{7}\cdot 2 - \frac{30}{6}\cdot 2 + \frac{9}{5}\cdot 2\right)} \\
&= \frac{\frac{5}{2}\,(e + 1/e - 3\,e + 3/e + 12/e) - \frac{3}{2}\,2/e}{\frac{1}{4}\left(\frac{50}{7} - \frac{18}{3}\right)} \\
&= \frac{\frac{5}{2}\,(16/e - 2\,e) - 3/e}{\frac{24}{4\cdot 3\cdot 7}} = \frac{-5\,e + \frac{37}{e}}{2/7} = \frac{7\,(37\,e - e^2)}{2\,e};
\end{aligned}$$

Con lo que la solución del problema es

$$p(x) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2\,e} + \frac{3}{e}\,x + \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right)\left(\frac{3}{2}\,x^2 - \frac{x}{2}\right) + \frac{7}{2}\left(\frac{37}{e} - 5\,e\right)\left(\frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x\right).$$

14. Dada una función $f(x)$ de la que sólo se conocen sus valores $f(x_n)$ donde

$$x_n = 10 + \frac{n-1}{5}, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6.$$

Determine una parábola que aproxime esta función mínimo-cuadráticamente.

<u>Solución</u>. Dada una función $f(x)$ se puede aproximar por una combinación lineal de funciones (linealmente independientes)

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_i(x).$$

La mejor aproximación mínimo cuadrática determina parámetros a_i tales que minimizan la norma L_2 de la diferencia

$$\min \| f(x) - \tilde{f}(x) \|_2.$$

En el caso de que sólo conocemos los valores de f en una malla discreta $\{x_n\}$, podemos aproximar la norma L_2 por la norma discreta l_2, y minimizar

$$\min \sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_i(x_n) \right)^2 .$$

Que un punto sea mínimo implica que es estacionario, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_i(x_n) \right)^2 \right) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m,$$

es decir,

$$-2 \sum_{n=1}^{N} \phi_j(x_n) \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi(x_n) \right) = 0,$$

con lo que obtenemos el sistema lineal de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_j(x_n) \, f(x_n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_j(x_n) \, \phi_i(x_n), \qquad j = 0, \ldots, m.$$

En nuestro caso, para un polinomio cuadrático

$$m = 2, \qquad \phi_0 = 1, \quad \phi_1 = x, \quad \phi_2 = x^2,$$

y para los 6 puntos

$$x_n = 10 + \frac{n-1}{5}, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6,$$

tenemos que resolver el sistema lineal simétrico

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{6} \phi_0^2(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_1(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_2(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n)\,\phi_0(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_1^2(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n)\,\phi_2(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n)\,\phi_0(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n)\,\phi_1(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_2^2(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,f(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n)\,f(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n)\,f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Operando

$$\sum_{n=1}^{6} \phi_0^2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} 1 = 6,$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_1(x_n) = \sum_{n=1}^{6} x_n &= \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right) \\ &= \left.\frac{N\,(N+99)}{10}\right]_{N=6} = 63, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{6} \phi_1^2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} x_n^2 &= \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^2 \\ &= \left.\frac{N\,(14701 + 297\,N + 2\,N^2)}{150}\right]_{N=6} = \frac{3311}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n)\,\phi_2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} x_n^3 &= \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^3 \\ &= \left.\frac{N\,(99+N)\,(4900 + 99\,N + N^2)}{500}\right]_{N=6} = \frac{34839}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{6} \phi_2^2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} x_n^4 &= \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^4 \\ &= \left.\frac{N\,(180074999 + 7276500\,N + 147010\,N^2 + 1485\,N^3 + 6\,N^4)}{18750}\right]_{N=6} \\ &= \frac{45870979}{625}, \end{aligned}$$

y donde los valores del término independiente no los podemos calcular al no conocer los valores de $f(x_n)$.

De esta forma obtenemos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 63 & 662{,}2 \\ 63 & 662{,}2 & 6967{,}8 \\ 662{,}2 & 6967{,}8 & 73393{,}6 \end{pmatrix},$$

que está mal condicionada. Por ejemplo, su norma infinito

$$\|A\|_\infty = 80923{,}6,$$

y estimando la norma infinito de su inversa mediante

$$\|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{\|x\|_\infty}{\|A\,x\|_\infty},$$

mediante un vector cualquiera, sea

$$x = \begin{pmatrix} 10{,}07 \\ -2 \\ 0{,}099 \end{pmatrix}, \qquad A\,x = \begin{pmatrix} -0{,}02 \\ -0{,}18 \\ -1{,}28 \end{pmatrix}, \qquad \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{10{,}07}{1{,}28} = 7{,}8,$$

con lo que

$$\kappa(A) = \|A\|_\infty\,\|A^{-1}\|_\infty \geq 7{,}8 \times 80923{,}6 = 631204 \gg 1,$$

por lo que hay que tener mucho cuidado en cómo se invierte. En cualquier caso, la solución de nuestro problema es $a = A^{-1}\,b$.

Este ejercicio ilustra las ventajas de utilizar polinomios (o funciones) ortogonales (en nuestro caso, l_2-ortogonales) en la minimización mínimo-cuadrática ya que en dicho caso

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_i(x_n)\,\phi_j(x_n) = 0, \qquad i \neq j,$$

con lo que la matriz será diagonal y definida positiva.

15. Haga el ejercicio anterior pero usando polinomios ortogonales con respecto a una función peso $r(x) = w(x) = 1$. ¿Cuál es la diferencia más significativa entres las soluciones de los dos ejercicios?

Solución. Vamos a minimizar la función

$$E(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \tilde{f}(x_n) \right)^2 \, w(x_n),$$

donde $w(x_n) > 0$ y

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \, P_i(x),$$

donde las funciones $P_i(x)$ son w-l_2-ortogonales

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \sum_{n=1}^{N} P_i(x_n) \, P_j(x_n) = 0, \qquad i \neq j.$$

El mínimo de la función de error será un punto estacionario

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = 0 = \sum_{n=1}^{N} w(x_n) \, P_k(x_n) \, \left(f(x_n) - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \, P_j(x_n) \right), \qquad k = 0, \ldots, m{-}1,$$

es decir, una sistema lineal diagonal cuya solución es

$$\alpha_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} w(x_n) \, P_k(x_n) \, f(x_n)}{\sum_{n=1}^{N} w(x_n) \, P_k^2(x_n)}.$$

Tenemos que calcular los tres primeros polinomios l_2-ortogonales. Partiremos de $P_0(x) = a_0 = 1$, por lo que la condición de l_2-ortogonalidad para el polinomio lineal $P_1(x) = b_1 \, x + b_0$ nos conduce a

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \sum_{n=1}^{N} P_1(x_n) = \sum_{n=1}^{N} b_1 \, x_n + b_0 = N \, b_0 + \frac{N \, (N + 99)}{10} \, b_1,$$

y en nuestro caso ($N = 6$)

$$6 \, b_0 + 63 \, b_1 = 0, \qquad b_0 = -10{,}5 \, b_1$$

$$P_1(x) = b_1 \, (x - 10{,}5),$$

y escogeremos $b_1 = 1$.

Para $P_2(x) = x^2 + \beta_1 \, P_1(x) + \beta_0 \, P_0(x)$, tenemos que

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \langle x^2, P_0 \rangle + \beta_0 \, \langle P_0, P_0 \rangle = 0,$$

donde

$$\langle P_0, P_0\rangle = \sum_{n=1}^{N} 1 = N = 6,$$

$$\langle x^2, P_0\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = \left.\frac{N\,(14701 + 297\,N + 2\,N^2)}{150}\right]_{N=6} = \frac{3311}{5},$$

luego

$$\beta_0 = -\frac{3311}{30} = -110{,}367;$$

por otro lado,

$$\langle P_1, P_2\rangle = \langle x^2, P_1\rangle + \beta_1\,\langle P_1, P_1\rangle = 0,$$

luego

$$\beta_1 = -\frac{\langle x^2, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = -\frac{\sum_{n=1}^{6} x_n^3}{\sum_{n=1}^{6} x_n^2} = -\frac{4977}{473} = 10{,}522,$$

luego obtenemos finalmente

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x - 10{,}5, \qquad P_2(x) = x^2 - 10{,}522\,x - 110{,}367.$$

Para calcular las coeficientes α_k ahora nos hace falta conocer $f(x_n)$.

16. Calcule una cota inferior del error de interpolación $|f(x) - p_n(x)|$ para $f(x) = \ln x$, $n = 3$ en el punto $x = 3/2$, si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/3$ y $x_3 = 2$.

<u>Solución</u>. Usaremos la expresión de Newton del polinomio interpolador

$$\begin{aligned} p(x) = f(x_0) + f[x_0, x1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2). \end{aligned}$$

Las diferencias divididas que necesitamos son

$$f[x_0, x_1] = f[1, 4/3] = \frac{\ln 4/3}{1/3} = 0{,}8630,$$

$$f[x_1, x_2] = f[4/3, 5/3] = \frac{\ln 5/3 - \ln 4/3}{1/3} = 0{,}6694,$$

$$f[x_2, x_3] = f[5/3, 2] = \frac{\ln 2 - \ln 5/3}{1/3} = 0{,}5470,$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[4/3, 5/3] - f[1, 4/3]}{2/3} = -0{,}2904,$$

$$f[4/3, 5/3, 2] = -0{,}1836, \qquad f[1, 4/3, 5/3, 2] = 0{,}1068,$$

con lo que obtenemos

$$p(x) = 0{,}8630\,(x-1) - 0{,}2904\,(x-1)\,(x-4/3) + 0{,}1068\,(x-1)\,(x-4/3)\,(x-5/3).$$

De la fórmula del error de interpolación sabemos que existe un $\xi \in (1, 2)$ tal que el error vale

$$E = \ln(3/2) - p(3/2) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{j=0}^{3} (3/2 - x_n).$$

Operando para $f(x) = \ln x$,

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4},$$

con lo que

$$E = (3/2 - 1)\,(3/2 - 4/3)\,(3/2 - 5/3)\,(3/2 - 2)\,\frac{-6}{\xi^4}\,\frac{1}{24},$$

y por tanto

$$|E| = \frac{0{,}0017361}{\xi^4}, \qquad \xi \in (1, 2),$$

que es una función monótonamente decreciente en ξ, por lo que la cota requerida en el enunciado es

$$0{,}000108506 < |E| = |\ln 3/2 - p(3/2)| < 0{,}0017361.$$