Novena relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 22 de Marzo de 2000

Ejercicios de derivación e integración numéricas.

1. Una regla de integración gaussiana o de Gauss se define como

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

donde los w_j son pesos positivos y la ecuación anterior debe satisfacerse para todos los monomios de grado $\leq n$. Calcule w_j y x_j para $w(x) \equiv 1$ y (1) n=1, y (2) n=2. Compare los x_j que ha obtenido con los ceros de los polinomios de Legendre.

2. Considere el método de integración de Gauss

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

con $n = 1$ y $n = 2$, y

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Deduzca w_j y x_j. ¿Cuál es la relación entre x_j y las raíces de los polinomios de Chebyshev?

3. Determine el error cometido cuando

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \approx \int_{a}^{b} p_n(x)\, dx,$$

para $n = 0, 1$ y donde p_n es un polinomio interpolante de $f(x)$.

4. Determine el error de integración del método del punto medio utilizando su definición (sin aplicar directamente los resultados vistos en teoría).

5. En la regla de integración de Simpson se tiene

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4\, f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right).$$

Suponga que al aplicar dicha regla se cometen errores de redondeo ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 al evaluar $f(a)$, $f((a+b)/2)$ y $f(b)$, respectivamente. Estudie como afectan estos errores de redondeo al error de integración de la fórmula de Simpson.

6. La ecuación de Laguerre es

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\frac{dy}{dx} + n\,y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto (Sturm-Liouville). Desarrolle el método de integración de Gauss-Laguerre, es decir, el método de Gauss basado en polinomios ortogonales de Laguerre.

7. La ecuación de Hermite es

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + 2\,n\,y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto. ¿Cómo evaluaría la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

utilizando las autofunciones de la ecuación de Hermite?

8. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\arccos x - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2. ¿En qué intervalo está definido el arcocoseno?. Calcule el error de aproximación.

9. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ una aproximación a $f(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Define

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Si $p(x)$ es un polinomio, ¿qué es $q(x)$? ¿Cuál es el error

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty?.$$

Nota:

$$\|g\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

10. Dada la siguiente tabla de valores

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,70010	0,40160	0,10810	$-0{,}17440$	$-0{,}43750$

,

y trabajando con aritmética de cinco cifras decimales, calcule:

a) La derivada primera de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h (espaciado entre puntos). Una vez calculados estos valores, determine $f'(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

b) La derivada segunda de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h. Una vez calculados estos valores, determine $f''(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

c) El polinomio de interpolación de $f(x)$. Una vez calculado este polinomio determine a partir de él los valores $f'(0{,}3)$ y $f''(0{,}3)$.

d) El valor de

$$\int_{0,1}^{0,5} f(x)\, dx,$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta.

e) El punto x_F tal que $f(x_F) = 0$ con $0{,}3 \leq x_F \leq 0{,}4$.

f) El punto x_T tal que

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x)\, dx = 0{,}1020.$$

11. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx,$$

b)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4\, e^{-x^2}\, dx.$$