Octava relación de problemas — Técnicas Numéricas

Profesor Francisco R. Villatoro — 22 de Marzo de 2000

SOLUCIONES:

1. Una regla de integración gaussiana o de Gauss se define como

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

donde los w_j son pesos positivos y la ecuación anterior debe satisfacerse para todos los monomios de grado $\leq n$. Calcule w_j y x_j para $w(x) \equiv 1$ y (1) n=1, y (2) n=2. Compare los x_j que ha obtenido con los ceros de los polinomios de Legendre.

Solución. Para el caso $n = 1$ tenemos la regla de integración gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1\, f(x_1),$$

que deberá ser exacta para

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = w_1\, 1,$$

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 = w_1\, x_1,$$

por lo que

$$x_1 = 0, \qquad w_1 = 2, \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx 2\, f(0),$$

que coincide con el teorema del valor medio.

Para el caso $n = 2$ tenemos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1\, f(x_1) + w_2\, f(x_2),$$

que deberá ser exacta para

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = w_1 + w_2,$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = w_1\,x_1 + w_2\,x_2,$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = w_1\,x_1^2 + w_2\,x_2^2,$$
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = w_1\,x_1^3 + w_2\,x_2^3,$$

cuya solución por sustitución nos da

$$w_1 = 2 - w_2, \qquad (2-w_2)\,x_1 + w_2\,x_2 = 0, \qquad x_2 = \frac{w_2-2}{w_2}\,x_1,$$
$$\frac{2}{3} = x_1^2\,(w_2-2)\,\left(\frac{w_2-2}{w_2} - 1\right) = -\frac{2}{w_2}\,(w_2-2)\,x_1^2,$$
$$x_1^2 = \frac{w_2}{3\,(2-w_2)},$$
$$(2-w_2)\,x_1^3 + w_2\,\left(\frac{w_2-2}{w_2}\right)^3\,x_1^3 = 0, \qquad (w_2-2)\,x_1^3\,4\,\frac{1-w_2}{w_2^2} = 0,$$

con lo que obtenemos las tres soluciones

$$(A) \quad w_2 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty,$$
$$(B) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_1 = 2,$$
$$(C) \quad w_2 = 1, \quad w_1 = 1, \quad x_1^2 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -x_1,$$

de las que (A) no es válido porque $x_i \notin (-1,1)$, (B) porque es la solución que hemos obtenido previamente y finalmente (C) nos permite obtener la regla de integración buscada

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Recordando que los polinomios de Legendre $L_j(x)$ son

$$L_0 = 1, \qquad L_1 = x, \qquad L_2 = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2},$$

cuyos ceros son

$$L_1(x) = 0, \qquad x = 0,$$

$$L_2(x) = 0, \qquad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

y coinciden con los puntos utilizados en las fórmulas de integración gaussiana. A las fórmulas de integración obtenidas se las denomina de Gauss-Legendre.

2. Considere el método de integración de Gauss

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j),$$

con $n = 1$ y $n = 2$, y

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Deduzca w_j y x_j. ¿Cuál es la relación entre x_j y las raíces de los polinomios de Chebyshev?

Solución. Para $n = 1$, la fórmula de integración buscada es

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \approx w_1\, f(x_1),$$

que tiene que ser exacta para los primeros monomios. Para calcular las integrales que vamos a obtener tenemos que realizar el cambio de variable

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int_{\pi}^{0} \frac{f(\cos\theta)}{\sin\theta}\, (-\sin\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta.$$

De esta forma, obtenemos

$$\int_{0}^{\pi} 1\, d\theta = \pi = w_1,$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos\theta\, d\theta = 0 = w_1\, x_1, \qquad x_1 = 0,$$

y obtenemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \approx \pi\, f(0).$$

Para $n = 2$, la fórmula de integración buscada es

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \approx w_1\, f(x_1) + w_2\, f(x_2),$$

que tiene que ser exacta para

$$\int_0^\pi 1\, d\theta = \pi = w_1 + w_2,$$

$$\int_0^\pi \cos\theta\, d\theta = 0 = w_1\, x_1 + w_2\, x_2,$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} = w_1\, x_1^2 + w_2\, x_2^2,$$

$$\int_0^\pi \cos^3\theta\, d\theta = 0 = w_1\, x_1^3 + w_2\, x_2^3,$$

cuya solución por sustitución nos permite obtener

$$w_1 = \pi - w_2, \qquad x_2 = \frac{w_2 - \pi}{w_2}\, x_1,$$

$$\frac{\pi}{2} = (\pi - w_2)\, x_1^2 \left(1 + \frac{\pi - w_2}{w_2}\right), \qquad x_1^2 = \frac{w_2}{2\,(\pi - w_2)},$$

$$0 = (\pi - w_2)\, x_1^3 \left(1 - \frac{(\pi - w_2)^2}{w_2^2}\right),$$

cuyas tres soluciones son

$$(A) \quad w_2 = \pi, \quad w_1 = 0, \quad x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty,$$

$$(B) \quad x_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_1 = \pi, \quad x_2 = 0,$$

$$(C) \quad w_2^2 - \pi^2 - w_2^2 + 2\,\pi\, w_2 = 0, \qquad w_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$w_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = -x_2,$$

de las que sólo (C) es solución válida, con lo cual

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{2}\, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Los polinomios de Chebyshev $T_j(x)$, normalizados para que $T_j(1) = 1$, son

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = x, \qquad T_2(x) = 2\,x^2 - 1,$$

cuyas raíces coinciden con los nodos de integración que hemos obtenido.

3. Determine el error cometido cuando

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx,$$

para $n = 0, 1$ y donde p_n es un polinomio interpolante de $f(x)$.

Solución. Para $n = 0$, hay dos polinomios interpolantes $p_0(x) = f(a)$ y $p_0(x) = f(b)$. Estudiaremos el primero de ellos, cuya fórmula de error de interpolación es

$$f(x) - p_0(x) = f[a, x]\,(x - a),$$

cuya integración nos da tras aplicar el teorema del valor medio

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b p_0(x)\,dx + \int_a^b f[a, x]\,(x - a)\,dx \\ &= \int_a^b p_0(x)\,dx + f[a, \xi] \int_a^b (x - a)\,dx,\end{aligned}$$

para $a \leq \xi \leq b$. De esta forma

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_0(x)\,dx = f[a, \xi]\,\frac{(b-a)^2}{2} = f'(\eta)\,\frac{(b-a)^2}{2},$$

donde $a < \eta < b$. De forma análoga se obtiene un resultado del todo similar para $p_0(x) = f(b)$.

Para un polinomio lineal, $n = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b p_1(x)\,dx + \int_a^b f[a, b, x]\,(x - a)\,(x - b)\,dx \\ &= \int_a^b p_1(x)\,dx - f[a, b, \xi]\,\frac{(b-a)^3}{6},\end{aligned}$$

donde $a \leq \xi \leq b$ y obtenemos el error de integración

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx = -\frac{f''(\eta)}{2}\,\frac{(b-a)^3}{6},$$

donde $a < \eta < b$.

4. Determine el error de integración del método del punto medio utilizando su definición (sin aplicar directamente los resultados vistos en teoría).

Solución. El método de integración del punto medio se basa en utilizar la aproximación polinómica

$$f(x) \approx p_0(x) = f\,(c)\,, \qquad c = \frac{a+b}{2},$$

que interpola a f en el punto c. Por tanto, el error de interpolación es

$$f(x) = f(c) + f[c,x]\,(x-c),$$

sin embargo, no podremos calcular el error de integración como en el ejercicio anterior debido a que

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\,dx = 0,$$

por lo que tendremos que introducir un punto intermedio adicional, sea el propio c, es decir,

$$f(x) = f(c) + f[c,c]\,(x-c) + f[c,c,x]\,(x-c)^2,$$

con lo que el error de integración

$$\int_a^b (f(x) - f(c))\,dx = f[c,c,\xi]\int_a^b (x-c)^2\,dx = \frac{f''(\eta)}{2}\,\frac{(b-a)^3}{12},$$

donde $a \le \eta, \xi \le b$.

5. En la regla de integración de Simpson se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\,\left(f(a) + 4\,f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Suponga que al aplicar dicha regla se cometen errores de redondeo ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 al evaluar $f(a)$, $f((a+b)/2)$ y $f(b)$, respectivamente. Estudie como afectan estos errores de redondeo al error de integración de la fórmula de Simpson.

Solución. Sea $fl(x)$ el número flotante asociado a x, y denotemos los errores flotantes en los datos de la función de la forma

$$fl(f(a)) = f(a)+\epsilon_1, \qquad fl(f(b)) = f(b)+\epsilon_1, \qquad fl(f(c)) = f(c)+\epsilon_1,$$

donde $c = (a+b)/2$. La evaluación numérica de la regla de Simpson nos da

$$S = S_{AE} + E_R = \frac{b-a}{6}\,(f(a) + 4\,f(c) + f(b)) + \frac{b-a}{6}\,(\epsilon_1 + 4\,\epsilon_2 + \epsilon_3),$$

donde S es la regla de Simpson evaluada numéricamente, S_{AE} es la regla de Simpson evaluada con aritmética exacta y E_R es el error de redondeo.

Además del error de redondeo tenemos error de integración,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - p_2(x)) &= \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,dx \\ &= f[a,b,c,\xi]\int_0^{b-a} y\,(y+a-c)\,(y+a-b)\,dy \\ &= f[a,b,c,\xi]\,(b-a)^4 = \frac{f'''(\eta)}{3!}\,(b-a)^4,\end{aligned}$$

con lo que tenemos que el error es

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{AE}\right| \le \frac{|f'''(\eta)|}{3!}\,(b-a)^4 + \frac{b-a}{6}\,(|\epsilon_1| + 4\,|\epsilon_2| + |\epsilon_3|),$$

donde se observa la componente debida al error de truncado y la debida al error de redondeo.

6. La ecuación de Laguerre es

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\frac{dy}{dx} + n\,y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto (Sturm-Liouville). Desarrolle el método de integración de Gauss-Laguerre, es decir, el método de Gauss basado en polinomios ortogonales de Laguerre.

Solución. La ecuación de Laguerre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-x}{x}\,\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}\,y = 0,$$

en forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx}\left(x\,e^{-x}\,\frac{dy}{dx}\right) + n\,e^{-x}\,y = 0.$$

Las fórmulas de integración de Gauss-Laguerre se basan en el uso de polinomios $r(x)$-ortogonales (con $r(x) = \exp -x$) de Laguerre $L_i(x)$ y permiten calcular integrales como

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, g(x)\, dx, \qquad g(x) = f(x)\, e^x,$$

en la forma

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, g(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j\, g(x_j).$$

Los polinomios ortogonales de Laguerre cumplen la condición de ortonogalidad

$$\langle L_i, L_j \rangle_r = \int_0^\infty e^{-x}\, L_i(x)\, L_j(x)\, dx = 0,$$

que permite determinarlos fácilmente. Por ejemplo, los dos primeros polinomios

$$L_0 = a_0, \qquad L_1 = a_1 + b_1\, x,$$

son

$$\langle L_0, L_0 \rangle_r = a_0^2 \int_0^\infty e^{-x}\, dx = a_0^2,$$

$$\langle L_0, L_1 \rangle_r = a_0 \left(a_1 \int_0^\infty e^{-x}\, dx + b_1 \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx \right) = a_0\, (a_1 + b_1) = 0,$$

con lo que $a_1 = -b_1$ y

$$L_1(x) = b_1\, (x - 1).$$

La raíz de $L_1(x)$ es $x = 1$, por lo que una fórmula de Gauss-Laguerre exacta hasta polinomios de primer orden es exacta para

$$\int_0^\infty e^{-x}\, 1\, dx = 1 = w_1\, 1,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x\, dx = 1 = w_1\, x_1,$$

nos da

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = 1\, g(1) = e\, f(1).$$

7. La ecuación de Hermite es

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + 2\,n\,y = 0.$$

Ponga dicha ecuación en forma de operador autoadjunto. ¿Cómo evaluaría la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

utilizando las autofunciones de la ecuación de Hermite?

Solución. La ecuación de Hermite en forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right) + 2\,n\,e^{-x^2}\,y = 0,$$

y si H_i y H_j son soluciones de esta ecuación correspondientes a $n_i \neq n_j$ entonces son ortogonales con el producto interior

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,H_i\,H_j\,dx = 0.$$

Los dos primeros polinomios de Hermite son

$$\langle H_0, H_0\rangle_r = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,a_0^2\,dx = 2\,a_0^2\,\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,a_0^2,$$

$$\langle H_0, H_1\rangle_r = a_0\,b_1\,\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx + a_0\,a_1\,\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = a_0\,a_1\,\sqrt{\pi} = 0,$$

luego

$$H_0(x) = a_0, \qquad H_1(x) = b_1\,x,$$

siendo el cero de H_1 el punto $x = 0$, con lo que las fórmulas de integración de Gauss-Hermite toman la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} w_j\,g(x_j),$$

donde

$$g(x) = e^{x^2}\,f(x).$$

Estas fórmulas deben ser exactas para los primeros monomios, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,1\,dx = \sqrt{\pi} = w_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x\, dx = 0 = w_1\, x_1, \qquad x_1 = 0,$$

y finalmente, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x\, dx \approx w_1\, g(x_1) = \sqrt{\pi}\, g(0) = \sqrt{\pi}\, f(0).$$

8. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimice

$$\int_{-1}^{1} \left(\sin \pi\, x - p(x)\right)^2\, dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2. Dicho polinomio se conoce como aproximación mínimo cuadrática de Legendre. Calcule la derivada de $\sin \pi\, x$ utilizando dicho polinomio.

Solución. Para aproximar mínimo-cuadráticamente con polinomios de Legendre primero deberemos calcularlos. Sean

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = A_1\, x + B_1, \qquad P_2(x) = A_2\, x^2 + B_2\, x + C_2,$$

Calculándolos (con la normalización $P_i(1) = 1$) obtenemos

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (A_1\, x + B_1)\, dx = 2\, B_1 = 0,$$

$$P_1(1) = A_1 = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (A_2\, x^2 + B_2\, x + C_2)\, dx = \frac{2}{3}\, A_2 + 2\, C_2 = 0,$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x\, (A_2\, x^2 + B_2\, x + C_2)\, dx = \frac{2}{3}\, B_2 = 0,$$

$$P_2(1) = 1 = A_2 + C_2, \qquad \frac{2}{3}\, A_2 + 2\, C_2 = 0,$$

$$A_2 = \frac{3}{2}, \qquad C_2 = -\frac{1}{2}, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}\, (3\, x^2 - 1).$$

La aproximación mínimo-cuadrática vendrá dada por

$$f(x) \approx Q(x) = A_0\, P_0(x) + A_1\, P_1(x) + A_2\, P_2(x),$$

donde

$$A_i = \frac{\langle f, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\, P_i(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} P_i^2(x)\, dx}.$$

En nuestro caso, $f = \sin \pi x$, obtenemos

$$A_0 = \frac{\int_{-1}^{1} \sin \pi x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = 0.$$

$$A_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\, \sin \pi x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = \frac{2/\pi}{2/3} = \frac{3}{\pi},$$

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,(3\,x^2 - 1)\, \sin \pi x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = 0,$$

luego

$$Q(x) = \frac{3}{4}\, x,$$

que como vemos es una expresión lineal.

Si consideramos que el grado del polinomio fuera 3, tendríamos

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,(5\,x^3 - 3\,x)\, \sin \pi x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = \frac{2\,(\pi^2 - 15)/\pi^3}{2/7} \approx -1{,}158,$$

y obtenemos

$$Q(x) = -0{,}782\, x + 2{,}90\, x^3,$$

que es una aproximación mucho mejor.

9. Determine el polinomio de grado ≤ 2 que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{arc\,cos} x - p(x))^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

sobre todos los polinomios de grado ≤ 2. ¿En qué intervalo está definido el arcocoseno?. Calcule el error de aproximación.

<ins>Solución</ins>. La función $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$. La integral que tenemos que minimizar corresponde al producto interior compensado de Chebyshev

$$\langle f, g \rangle_r = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

y por tanto tendremos que buscar una solución entre los polinomios de Chebyshev. Los polinomios hasta segundo grado se obtienen de la recurrencia

$$T_{n+1} = 2\,x\,T_n - T_{n-1},$$

y son

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2\,x^2 - 1,$$

con la condición de normalización $T_i(1) = 1$. De esta forma nuestro polinomio se puede desarrollar como

$$p(x) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j\, T_j(x), \qquad \alpha_j = \frac{\langle \operatorname{arc\,cos} x\, T_j(x)\rangle_r}{\langle T_j(x), T_j(x)\rangle_r}.$$

Tendremos que calcular las siguientes integrales

$$\alpha_0 = \frac{\langle f, T_0\rangle_r}{\langle T_0, T_0\rangle_r} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx} = \frac{\int_0^\pi \theta\, d\theta}{-\operatorname{arc\,cos} x\big]_{-1}^{1}} = \frac{\pi^2/2}{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle f, T_1\rangle_r}{\langle T_1, T_1\rangle_r} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x\, \operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx} = \frac{\int_0^\pi \theta\, \cos\theta\, d\theta}{\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta} = \frac{-2}{\pi/2} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle f, T_2\rangle_r}{\langle T_2, T_2\rangle_r} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{(2\,x^2-1)\, \operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(2\,x^2-1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx} = \frac{\int_0^\pi \theta\,(2\,\cos^2\theta - 1)\, d\theta}{\int_0^\pi \cos^2 2\theta\, d\theta} = \frac{0}{\pi/2} = 0,$$

luego

$$p(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\, x.$$

El error cuadrático medio para esta aproximación es

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{arc\,cos} x - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi^4 - 96}{12\,\pi} \approx 0{,}0374.$$

10. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a, b]$ y $p(x)$ una aproximación a $f(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Define

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Si $p(x)$ es un polinomio, ¿qué es $q(x)$? ¿Cuál es el error

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty?.$$

Nota:

$$\|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

<u>Solución</u>. Es obvio comprobar que

$$q(x) = f(x) - \int_a^x (f'(t) - p(t))\,dt = f(a) + \int_a^x p(t)\,dt,$$

es un polinomio de grado $n+1$ si $p(x)$ es un polinomio de grado n.

Más aún,

$$|f(x)-q(x)| = \left|\int_a^x (f'(t) - p(t))\,dt\right| \le \int_a^x |f'(t)-p(t)|\,dt \le \|f'-p\|_\infty \int_a^x dt,$$

luego

$$\|f - q\|_\infty \le \|f' - p\|_\infty\,(b-a) \le \epsilon\,(b-a).$$

11. Dada la siguiente tabla de valores

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,70010	0,40160	0,10810	−0,17440	−0,43750

,

y trabajando con aritmética de cinco cifras decimales, calcule:

a) La derivada primera de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h (espaciado entre puntos). Una vez calculados estos valores, determine $f'(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

b) La derivada segunda de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, para distintos valores de h. Una vez calculados estos valores, determine $f''(0{,}3)$ por extrapolación de Richardson.

c) El polinomio de interpolación de $f(x)$. Una vez calculado este polinomio determine a partir de él los valores $f'(0{,}3)$ y $f''(0{,}3)$.

d) El valor de

$$\int_{0{,}1}^{0{,}5} f(x)\,dx,$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta.

e) El punto x_F tal que $f(x_F) = 0$ con $0{,}3 \leq x_F \leq 0{,}4$.

f) El punto x_T tal que

$$\int_{0,1}^{x_T} f(x)\,dx = 0{,}1020.$$

<u>Solución</u>.

a) Para calcular la primera derivada de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, utilizaremos la expresión de segundo orden de precisión

$$f'(x) = f'_h(x) + O\left(h^2\right) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} - \frac{f'''(x)\,h^2}{6} + O\left(h^4\right),$$

y dos pasos de malla, de forma que restando

$$f'_{2h} - f'_h = \frac{f'''(x)\,h^2}{2} + O\left(h^4\right),$$

y por extrapolación de Richardson

$$f'(x) = f'_h(x) + \frac{f'_h(x) - f'_{2h}(x)}{3} + O\left(h^4\right).$$

Operando con cinco dígitos de precisión

$$f'_{0,1}(0{,}3) = -2{,}8800, \qquad f'_{0,2}(0{,}3) = -2{,}8440, \qquad f'(0{,}3) = -2{,}8920.$$

b) Para calcular la segunda derivada de $f(x)$ en el punto $x = 0{,}3$, utilizaremos la expresión de segundo orden de precisión

$$f''(x) = f''_h(x) + O\left(h^2\right) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(x)\,h^2}{12} + O\left(h^4\right),$$

y dos pasos de malla, de forma que restando

$$f''_{2h} - f''_h = \frac{f(4)(x)\,h^2}{4} + O\left(h^4\right),$$

y por extrapolación de Richardson

$$f''(x) = f''_h(x) + \frac{f''_h(x) - f''_{2h}(x)}{3} + O\left(h^4\right).$$

Operando con cinco dígitos de precisión

$$f''_{0,1}(0{,}3) = 1{,}1000, \qquad f''_{0,2}(0{,}3) = 1{,}1600, \qquad f''(0{,}3) = 1{,}0800.$$

c) Escribiremos el polinomio interpolador en la forma de Newton mediante diferencias divididas

$$\begin{aligned} p(x) = f[0{,}1] + f[0{,}1, 0{,}2]\,(x - 0{,}1) + \dots \\ + f[0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5]\,(x - 0{,}1)\,\cdots\,(x - 0{,}5). \end{aligned}$$

Calculando las diferencias divididas con cinco dígitos de precisión

x	$f[x]$				
0,1	0,70010	−2,9850	0,25000	1,0000	1,00000
0,2	0,40160	−2,9350	0,55000	1,4000	
0,3	0,10810	−2,8250	0,97000		
0,4	−0,17410	−2,6310			
0,5	−0,43750				

resulta el polinomio interpolador de Newton

$$\begin{aligned} p(x) &= 0{,}70010 - 2{,}985\,(x - 0{,}1) + 0{,}25\,(x - 0{,}1)(x - 0{,}2) \\ &\quad + (x - 0{,}1)(x - 0{,}2)(x - 0{,}3) \\ &\quad + (x - 0{,}1)(x - 0{,}2)(x - 0{,}3)(x - 0{,}4) \\ &= x^4 - 3\,x + 1. \end{aligned}$$

Los valores de las derivadas en 0,3 son

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4\,x^3 - 3, \qquad & f'(0{,}3) \approx p'(0{,}3) = -2{,}8920, \\ p''(x) &= 12\,x^2, \qquad & f''(0{,}3) \approx p''(0{,}3) = 1{,}0800. \end{aligned}$$

Ambos valores están calculados con una precisión de cuarto orden y coinciden con los calculados por extrapolación de Richardson, también con cuarto orden de precisión.

d) La fórmula de integración compuesta de Simpson es

$$\int_{x_0}^{x_N} = \frac{h}{6} \sum_{i=1}^{N} (f(x_{i-1}) + 4\,f(x_{i-1/2}) + f(x_i)),$$

y la podemos aplicar con $h = 0{,}2$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{0,1}^{0,5} f(x)\,dx = \frac{0{,}2}{6}\,&(0{,}70010 + 4 \cdot 0{,}40160 + 2 \cdot 0{,}10810 \\ &-4 \cdot 0{,}17440 - 0{,}43750) \\ = {}&0{,}046253. \end{aligned}$$

e) La manera más precisa que tenemos de calcular dicha raíz, utilizando sólo los datos del problema, es utilizar el polinomio interpolador y hacer

$$f(x_F) \approx p(x_F) = 0.$$

La ecuación cuártica $x^4 - 3\,x + 1 = 0$ la podemos resolver de forma exacta utilizando las fórmulas que aparecen el enunciado de la novena relación de problemas, y obtenemos para las raíces

$$x_1 = 0{,}33767, \qquad x_2 = 1{,}30749, \qquad x_{3,4} = -0{,}82258 \pm 1{,}26032\,\mathrm{I}.$$

También podemos utilizar un método numérico de punto fijo, sea

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{3}.$$

Este método converge en $I = [0{,}3, 0{,}4]$ ya que (1) existe punto fijo en I, (2) g está bien definida en I, (3) $g(I) \subset I$, ya que g es creciente en I y $g(0{,}4) < 0{,}4$, y (4) $|g'(I)| < 1|$ ya que g' es creciente en I y $g'(0{,}4) \ll 1$. Además, la pequeñez de $g'(I)$ nos indica que el método convergerá bastante rápido. Iterando obtenemos

$$x_0 = 0{,}35, \qquad x_1 = 0{,}33834, \qquad x_2 = 0{,}33770, \qquad x_3 = 0{,}33767 = x_4,$$

luego obtenemos $x_F \approx 0{,}33767$ con cinco dígitos de precisión.

f) En el intervalo $[0{,}1, 0{,}5]$ podemos aproximar x_T por la expresión

$$\int_{0{,}1}^{x_T} f(x)\,dx \approx \int_{0{,}1}^{x_T} p(x)\,dx = 0{,}1020,$$

es decir,

$$h(x_T) = -0{,}085002 + x_T - \frac{3\,x_T^2}{2} + \frac{x_T^5}{5} = 0{,}1020.$$

Sin embargo, esta ecuación no tiene solución en dicho intervalo, ya que la función $f(x)$ es positiva en $[0{,}1, x_F]$ y por tanto h crece en dicho intervalo hasta alcanzar un valor de

$$h(x_F) = 0{,}08251,$$

y entonces decrece en el intervalo $[x_F, 0{,}5]$ ya que f es negativa.

Si extrapolamos la función $p(x)$ fuera de su intervalo de validez, obtendremos una solución en $[1{,}5, 2]$ ya que h vuelve a crecer para $x > 1{,}30749$. Sin embargo, dicha solución no es válida para nuestro problema y, por tanto, no la calcularemos.

12. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx,$$

b)

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4\, e^{-x^2}\, dx.$$

Solución. Aunque en un principio podemos pensar en utilizar fórmulas de Gauss-Hermite, el hecho de que el intervalo de integración sea semi-infinito no nos lo permite. Debemos usar fórmulas de Gauss-Laguerre que están definidas en $[0, \infty)$, y mediante el cambio de variable

$$z = x + 1, \qquad dz = dx,$$

obtenemos

$$I(f) = \int_{-1}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx = \int_{0}^{\infty} f(z-1)\, e^{-(z-1)^2}\, dz = \int_{0}^{\infty} g(z)\, e^{-z}\, dz = I(g),$$

donde

$$g(z) = f(z-1)\, e^{-(z-1)^2}\, e^{z}.$$

Las fórmulas de Gauss-Laguerre son de la forma

$$I(g) = \sum_{i=1}^{4} w_i\, g(z_i),$$

donde z_i son los ceros de los polinomios de Laguerre. Los cinco primeros polinomios de Laguerre se pueden calcular por la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x) - (2\,n + 1 - x)\, L_n(x) + n^2\, L_{n-1}(x) = 0,$$

y son

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = 1 - x, \qquad L_2(x) = 2 - 4\,x + x^2,$$

$$L_3(x) = 6 - 18\,x + 9\,x^2 - x^3, \qquad L_4(x) = 24 - 96\,x + 72\,x^2 - 16\,x^3 + x^4.$$

Los cuatro ceros del quinto polinomio $L_4(x)$ se pueden calcular por el método presentado en el recetario de la relación novena y tienen el valor numérico

$$z_1 = 0{,}322548, \quad z_2 = 1{,}74576, \quad z_3 = \quad 4{,}53662, \quad z_4 = 9{,}39507.$$

Los pesos de la regla de integración de Gauss-Laguerre se obtienen resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\int_0^\infty x^j\, e^{-x} = \sum_{i=1}^N w_i\, x_i^j,$$

y son

$$w_1 = 0{,}603154, \quad w_2 = 0{,}357419, \quad w_3 = 0{,}0388879, \quad w_4 = 0{,}000539295.$$

De esta forma obtenemos

a) Para
$$g(z) = (z-1)\, e^{-(z-1)^2}\, e^z,$$
obtenemos
$$\int_{-1}^\infty x\, e^{-x^2}\, dx \approx \int_0^\infty g(z)\, e^{-z}\, dz = -0{,}286450,$$
que está bastante alejado del valor exacto
$$\int_{-1}^\infty x\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2\,e} = 0{,}18394,$$
pero esto es de esperar porque hemos usado solamente cuatro puntos.

b) Para
$$g(z) = (z-1)^4\, e^{-(z-1)^2}\, e^z,$$
obtenemos
$$\int_{-1}^\infty x^4\, e^{-x^2}\, dx \approx \int_0^\infty g(z)\, e^{-z}\, dz = 0{,}390614,$$
que está bastante alejado del valor exacto
$$\int_{-1}^\infty x^4\, e^{-x^2}\, dx = \frac{-5}{4\,e} + \frac{3\,\sqrt{\pi}}{8} + \frac{3\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(1)}{8} = 0{,}764939,$$
pero esto es de esperar porque hemos usado solamente cuatro puntos.