Novena relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 9 de Mayo de 2000

Ejercicios de resolución numérica de problemas de valores iniciales de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL (brevario + recetario)

Dado un método numérico para la resolución de

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

se analiza su estabilidad lineal considerando la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\, y,$$

que para métodos multipaso o de Runge-Kutta, conduce a la ecuación en diferencias finitas lineal (homogénea)

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} \alpha_j\, y_{n+j} = h\lambda \sum_{j=-m_1}^{m_2} \beta_j\, y_{n+j},$$

cuya solución toma la forma $y_n = \sum \beta_i\, r_i^n$, donde r_i son las raíces de su polinomio característico o de estabilidad, obtenido sustituyendo y_n por r^n,

$$p(r, h\lambda) = \rho(r) + h\,\lambda\,\sigma(r) = 0,$$

donde, con $m = \text{máx}\{n_1, m_1\}$, se tendrá que

$$\rho(r) = \sum_{j=m-n1}^{m+n_2} \alpha_j\, r^j, \qquad \sigma(r) = \sum_{j=m-m1}^{m+m_2} \beta_j\, r^j.$$

Este método numérico será consistente a la ecuación $y' = f$ si y sólo si

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=-n_1}^{n_2} j\,\alpha_j = \sum_{j=-m_1}^{m_2} \beta_j.$$

es decir, si y sólo si

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

Todo método consistente debe tener $r = 1$ como raíz de $\rho(r)$. Denominamos raíz principal r_1 del polinomio característico a la que aproxima la solución de la ecuación diferencial ordinaria $e^{\lambda t} = (e^{h\lambda})^n \approx \xi^n$, es decir, $\xi = 1 + h\,\lambda + O(h^2\,\lambda^2)$. Esta raíz es una aproximación al desarrollo de Taylor de la exponencial $r_1 = \exp(h\lambda) + O(h^p\,\lambda^p)$, donde p es el orden de consistencia del método. Las raíces restantes, si existen, se denominan raíces espurias y no convergen a soluciones de la ecuación diferencial.

Un teorema (demostrado en diferentes versiones por Ritchmyer, Lax, Dahlquist) nos da las condiciones necesarias y suficientes para que un método multipaso (o un método de Runge-Kutta) sea convergente, es decir, que sea consistente y que cumpla la condición de la raíz (0-estabilidad). La condición de la raíz o de 0-estabilidad se cumple si ninguna raíz de $\rho(r)$ tiene módulo mayor que la unidad y todas las raíces de módulo unidad son simples.

Un método numérico es fuertemente estable si todas las raíces de $\rho(r) = 0$ ($p(r, 0) = 0$) cumplen $|r_i| < 1$ excepto la raíz simple $r = 1$. Si además es consistente, entonces será convergente (en el sentido $h\lambda \to 0$). Por ello, la estabilidad fuerte es útil sólo para $h\lambda$ suficientemente pequeño.

En la práctica, para $h\lambda$ finito, y debido a los errores de redondeo, la estabilidad fuerte es demasiado poco restrictiva, con lo que interesa estudiar la estabilidad débil, es decir, la estabilidad del método para $h\lambda$ finito.

La estabilidad débil más simple, útil para problemas estables ($\lambda < 0$) es la estabilidad absoluta. Un método numérico es absolutamente estable para aquellos valores de $h\,\lambda$ para los cuales las raíces r_i de su polinomio característico son de módulo menor que la unidad ($|r_i| < 1$).

Para problemas inestables ($\lambda > 0$), la estabilidad absoluta no es útil y se introduce la estabilidad relativa. Un método numérico es relativamente estable si el módulo de las raíces espurias de su polinomio característico es menor que el de la raíz principal, con lo que ésta domina a aquellas.

Finalmente, es importante recordar que para sistemas de ecuaciones diferenciales los anteriores conceptos de estabilidad se aplican de igual forma pero se ha de trabajar con λ complejo, que corresponderá a los autovalores del jacobiano de la función vectorial f. Para ecuaciones diferenciales simples basta estudiar λ real.

Para analizar la estabilidad de un método, se puede utilizar el método del lugar de las raíces, que para $h\lambda$ real se reduce a calcular, por ejemplo, mediante Newton, y representar gráficamente las raíces del polinomio de estabilidad. Cuando el método numérico se aplica a sistemas de ecuaciones diferenciales, los valores de λ corresponden a los autovalores de la matriz de coeficientes, por lo que hay que representar el lugar de las raíces en el plano complejo $h\lambda$ (lo que se hace normalmente en Automática para el desarrollo de sistemas de control). En análisis numérico, lo usual es representar el diagrama de estabilidad que consiste en el contorno de la función $\max |r_i| = 1$ que representa la curva límite de estabilidad absoluta del método. Desde un punto de vista analítico podemos determinar la estabilidad utilizando desarrollos en serie de Taylor, para $|h\lambda| << 1$; si el método es consistente, podemos conocer la raíz principal hasta el orden de consistencia y hacer una deflación del polinomio de estabilidad, reduciéndolo un grado, lo que facilita bastante el análisis de estabilidad.

EJERCICIOS DE LA RELACIÓN

1. Dada una función analítica $y(x)$ (con serie de Taylor convergente) y un paso de tiempo h, se define el operador en diferencias finitas E como

$$Ey(t) = y(t+h) = y(t) + hDy(t) + \frac{h^2}{2}D^2y(t) + O\left(h^3\right),$$

donde el operador derivada $Dy(t) = dy/dt$. Podemos escribir simbólicamente (como operador pseudo-diferencial)

$$Ey(t) = y(t+h) = \exp(h\,D)y(t), \qquad E^{-1}y(t) = y(t-h) = \exp(-h\,D)y(t).$$

Los operadores de diferencias finitas hacia adelante (forward), hacia atrás (backward) y centrado (centered) se definen como

$$\Delta = E - 1, \qquad \nabla = 1 - E^{-1}, \qquad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}.$$

Determina una expresión exacta para D y para D^2 en función de los operadores Δ, ∇ y δ.

2. Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

y un método predictor-corrector cuyo corrector es un Adams-Moulton de cuarto orden, es decir,

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\,f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19\,f(x_n, y_n) - 5\,f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad x_n = n\,h, \qquad y_n = y(x_n).$$

Describa cómo aplicaría dicho método y bajo qué condiciones converge.

3. Calcule el error de truncado del método de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\, f_{n+1} + 19\, f_n - 5\, f_{n-1} + f_{n-2}\right),$$

utilizado en el problema anterior.

4. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector dado por

$$y^P_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4\,h}{3}\,(2\, f_n - f_{n-1} + 2\, f_{n-2}),$$

$$y_{n+1} = y^C_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\,(f(x_{n+1}, y^P_{n+1}) + 4\, f_n + f_{n-1}),$$

donde los superíndices P y C indican predictor y corrector, respectivamente. Determine el error local o de truncado de este método. Estudie la estabilidad de los métodos predictor y corrector, por separado. ¿Cuál es la estabilidad del método predictor-corrector en conjunto? NOTA: utilice los resultados que aparecen en el recetario adjunto.

5. Para el método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37\, f_{n-2} - 9\, f_{n-3}),$$

(a) calcule el error de truncado, y (b) analice la estabilidad lineal de este método.

6. Calcule el orden de precisión y la estabilidad del método

$$y_{n+1} = 4\, y_n - 3\, y_{n-1} + 2\, h\, f_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

¿Cómo arrancaría dicho método? ¿Por qué?

7. Considere la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_n + c\,(y_{n-1} - y_{n-2}), \qquad n \geq 2, \quad 0 < c < 1,$$

donde y_0, y_1 e y_2 se conocen. Estudie el límite

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$

8. Determine el orden de exactitud y los errores de truncado del método

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + y_{n+1}) + \frac{h}{4}\left(4\,y'_{n+1} - y'_n + 3\,y'_{n-1}\right), \qquad n \geq 1,$$

y analice su estabilidad, consistencia y convergencia hacia la solución de la ecuación $y' = f(x,y)$. ¿Necesita arranque dicho método? ¿Cómo lo arrancaría? Justifique sus respuestas.

9. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x,y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\,(y''_n - y''_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).$$

¿Cuál es el orden de exactitud y errores de truncado de este método? Analice la estabilidad de este método.

10. Considere el método

$$y_{n+1} = 2\,y_{n-1} - y_n + h\,\left(\frac{5}{2}\,f_n + \frac{1}{2}\,f_{n-1}\right).$$

Determine el error de truncado, la estabilidad, la consistencia y la convergencia de este método.