Décima relación de problemas | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 10 de Mayo de 2000

Ejercicios de resolución numérica de problemas de condiciones de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Sabemos que $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si $Ax = 0$ sólo tiene la solución trivial ($x = 0$). El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice lo mismo para ecuaciones diferenciales. El problema de condiciones de contorno no homogéneo

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2,$$

tiene solución única si y sólo si el problema homogéneo asociado

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

sólo tiene como solución la trivial ($y = 0$).

Más aún, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

entonces existen soluciones no triviales ($y \not\equiv 0$) del problema homogéneo asociado (con condiciones de Robin) si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b), \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

a) Resuelva el problema $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

b) Resuelva $y'' = 0; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0.$

c) Resuelva $y'' + 2y' - 3y = 9x; \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 2.$

d) Resuelva $y'' = 2; \quad y(-1) = 5, \quad y(1) - 2y'(1) = 1.$

e) Resuelva el problema $x'' - 2\,x' + x = 0; \quad x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta.$

2. En analogía con la solución de sistemas lineales $Ax = b$, para los que

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} b_k, \qquad B = A^{-1},$$

Green introdujo a finales del siglo pasado las funciones fundamentales o funciones de Green. Considere $A = D^2$ y el problema de contorno

$$D^2 x(t) = x''(t) = f(t), \qquad x(0) = x(1) = 0,$$

demuestre que se resuelve mediante la fórmula

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f(s)\, ds,$$

donde la función de Green para este problema es ($\int_0^1 G \approx (D^2)^{-1}$)

$$G(t,s) = \begin{cases} s\,(t-1), & 0 \le s \le t \le 1, \\ t\,(s-1), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

3. Aplique el método del disparo para resolver el problema

$$x'' = -9\,x, \qquad x(0) = 1, \quad x(\pi/6) = 5,$$

encontrando primero la solución x_z del problema

$$x_z'' = -9\,x_z, \qquad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

y después ajustando z de modo que $x_z(\pi/6) = 5$. Cómo alteraría el resultado si $x(\pi/3) = 5$.

4. Para el problema

$$x'' = -2\,t\,(x')^2, \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = \beta = 1 + \pi/4,$$

el método del disparo, se basa en resolver la ecuación

$$x_z'' = -2\,t\,(x_z')^2, \qquad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

de modo que $\phi(z) \equiv x_z(1) - \beta = 0$. Determine la función $\phi(z)$ e indique cómo la resolvería mediante el método de Newton.

5. Considere el problema de contorno

$$\epsilon \frac{dy}{d\theta} = \sin^2\theta - \lambda \frac{\sin^4\theta}{y}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$y(\pi/2) = y(-\pi/2) = 1.$$

Para resolver este problema podemos utilizar la técnica de shooting (disparo) y escribir

$$\epsilon \frac{du}{d\theta} = \sin^2\theta - \lambda \frac{\sin^4\theta}{u}, \qquad u(\frac{\pi}{2}) = 1, \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Si $u(\lambda, \theta)$ es la solución de este problema para un valor fijo de ϵ, podemos considerar $\lambda = \lambda(\epsilon)$ de tal forma que

$$\phi(\lambda) = u(\lambda, -\pi/2) - 1 = 0,$$

y entonces $y(\theta) = u(\lambda, \theta)$ es una solución de (1) para ϵ, $\lambda(\epsilon)$.

a) Cómo resolvería la ecuación $\phi(\lambda) = 0$ mediante el método de Newton.

b) Para calcular la derivada de ϕ escribiremos una ecuación diferencial para ella. Si la solución $u(\lambda, \theta)$ de la ecuación (1) es continuamente diferenciable con respecto a λ, entonces tome

$$v(\lambda, \theta) = \frac{\partial u(\lambda, \theta)}{\partial \lambda},$$

y obtenga un problema de contorno tal que

$$\frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} = v(\lambda, -\pi/2).$$

c) Escriba las iteraciones del método de Newton en función de u y v.

d) Escriba sendos métodos en diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales para u y para v.

6. Resuelva el siguiente problema de valores en el contorno

$$x'' + 2\,x' + 10\,t = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(1) = 2,$$

para $x(1/2)$ mediante diferencias finitas con tamaño de malla $h = 1/4$.

7. Determine la solución numérica aproximada del problema

$$-u'' = x, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante el método de elementos finitos en el espacio $V_h^{(1)}$ de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla $h = 1/4$. Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

8. Resuelva el problema

$$-((1+x)\,u'(x))' = 1 + (1 + 3\,x - x^2)\,exp(-x), \qquad 0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$, mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \,\sin(j\,\pi\,x).$$

para $q = 3$. Para calcular las integrales que le surjan utilice la regla del trapecio.

9. Aplique el método de Elementos Finitos cG(1), que usa polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$. Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución.

10. Aplique el método de Elementos Finitos cG(3), que usa polinomios cúbicos a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$. Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución. ¿Cómo es la matriz que obtiene?