CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Ejercicios resueltos

Problema 1. Desarrolle un modelo simplificado de un cohete como un cuerpo sujeto a la gravedad que se mueve en vertical por el empuje de una fuerza de propulsión vertical.

Solución. Para modelar un cohete real consideraremos que su forma no es significativa y que su masa está distribuida de forma uniforme, por lo que despreciaremos su momento de inercia y lo consideraremos como una masa puntual. Consideraremos que el movimiento es unidimensional en la dirección vertical. Despreciaremos también la resistencia del aire suponiendo que el número de Reynolds del aire es mucho mayor que 1 (Re$\gg$ 1). Los cohetes tienen múltiples etapas o secciones de combustible que cuando se consumen son despegadas del propio cohete. Tampoco consideraremos este proceso y supondremos que tenemos una sola etapa. Los cohetes cambian de masa conforme consumen combustible y consideraremos dicho cambio de masa como una función del tiempo $m(t)$. Finalmente supondremos que la fuerza impulsora del cohete se puede modelar por una función dependiente del tiempo $T(t)$.

Bajo estas hipótesis la ley de Newton permite escribir las ecuaciones del cohete (ver Figura 1.1) como

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} = -m(t)\,g + T(t),$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{T(t)}{m(t)}, \tag{1.1}$$

junto con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = v_0.$$

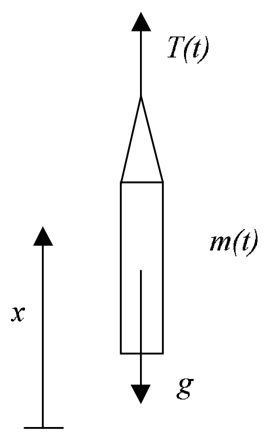

Figura 1.1. Representación de un cohete simplificado en movimiento vertical.

Aunque la solución de la ecuación (1.1) se puede obtener mediante cuadraturas de forma sencilla, para obtener una solución analítica más simple supondremos que la fuerza impulsora es constante y despreciaremos el consumo de combustible ($|\dot{m}| \ll 1$), con lo que la masa del cohete también será constante. En ese caso el cohete seguirá un movimiento parabólico unidimensional, es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{g}{2} t^2 + v_0\, t + \frac{T}{2\,m} t^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{T}{m} - g \right) t^2 + v_0\, t. \end{aligned}$$

Cuando $t \to \infty$ esta solución se comporta como

$$x(t) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{T}{m} - g \right) t^2.$$

Esta solución no es físicamente factible debido a que tiende a infinito cuando $T - m\,g > 0$ y a menos infinito cuando $T - m\,g < 0$; en ambos casos, sabemos por nuestra experiencia que este no es el comportamiento real de un cohete. En este sentido, la hipótesis matemática que hemos realizado para derivar esta solución no es físicamente correcta. Debemos por tanto considerar que m y T son funciones que no pueden permanecer constantes siempre. Como sabemos que el cohete deberá alcanzar un valor máximo de altura habrá que añadir la fricción del aire para obtener soluciones válidas para tiempos grandes.

En cualquier caso, consideraremos un método numérico para resolver la ecuación (1.1). Lo primero que podemos hacer es reducir esta ecuación a un sistema de ecuaciones de primer orden,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \equiv y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{T(t)}{m(t)} - g, \end{cases}$$

que podemos notar en notación vectorial como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(t)}{m(t)} - g \end{pmatrix}.$$

Esta expresión se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\,\mathbf{z} + \mathbf{b}. \tag{1.2}$$

donde

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(t)}{m(t)} - g \end{pmatrix}.$$

Para aproximar numéricamente las derivadas podemos utilizar un desarrollo en serie de Taylor tal como

$$f(x+h) = f(x) + h\,\frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + O\left(h^3\right),$$

que nos permite aproximar la primera derivada con una expresión hacia adelante

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)\,.$$

También podemos considerar el desarrollo en serie de Taylor

$$f(x-h) = f(x) - h\,\frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + O\left(h^3\right),$$

que nos permite aproximar la primera derivada con una expresión hacia atrás

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)\,.$$

Utilizando estas expresiones podemos obtener métodos numéricos para la ecuación (1.2) de igual forma a como hicimos en el texto. Podemos obtener un método de Euler explícito o hacia adelante de la forma

$$\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{z}^n + \Delta t\ (A\,\mathbf{z}^n + \mathbf{b}^n) = (I + A\,\Delta t)\ \mathbf{z}^n + \mathbf{b}^n,$$

donde $\Delta t \equiv h$ y se utiliza la condición inicial $\mathbf{z}^0 = (0, v_0)^\top$.

También podemos obtener un método de Euler implícito o hacia atrás de la forma

$$\mathbf{z}^n = \mathbf{z}^{n-1} + \Delta t\ (A\,\mathbf{z}^n + \mathbf{b}^n)\,,$$

que se puede escribir como el sistema lineal

$$(I - A\,\Delta t)\ \mathbf{z}^n = \mathbf{z}^{n-1} + \Delta t\,\mathbf{b}^n,$$

cuya solución es

$$\mathbf{z}^n = (I - A\,\Delta t)^{-1}\ \Big(\mathbf{z}^{n-1} + \Delta t\,\mathbf{b}^n\Big)\,.$$

Por otro lado, también podemos aplicar directamente un método numérico a la ecuación original de segundo orden. Para ello utilizaremos la expresión

$$f(x+h) + f(x-h) - 2\,f(x) = h^2\frac{d^2 f}{dx^2} + O\Big(h^4\Big)\,,$$

muy fácil de verificar y que conduce a la siguiente aproximación para la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} + O\Big(h^2\Big)\,,$$

que es de segundo orden de precisión. Aplicando esta expresión a la función $x(t)$ obtenemos

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{x(t+\Delta t) - 2\,x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O\Big(\Delta t^2\Big)\,,$$

donde Δt es el paso de tiempo. Normalmente se escribe $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, con $t^0 = 0$, y $x(t^n) \equiv x^n$, con lo que podemos reescribir nuestra aproximación como

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^n = \frac{x^{n+1} - 2\,x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2} + O\Big(\Delta t^2\Big)\,.$$

De esta forma nuestra ecuación diferencial se puede discretizar como

$$\frac{x^{n+1} - 2\,x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{T^n}{m^n} - g,$$

que se puede despejar de la forma

$$x^{n+1} = 2\,x^n - x^{n-1} + \Delta t^2\ \left(\frac{T^n}{m^n} - g\right)\,. \tag{1.3}$$

De igual forma que la ecuación diferencial original al ser de segundo orden requiere dos condiciones iniciales, esta ecuación discreta necesita también los valores iniciales de los dos primeros

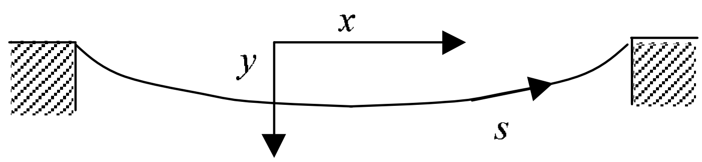

Figura 1.2. Representación de una cuerda elástica colgante de extremos fijos.

pasos de tiempo. Para obtenerlos podemos discretizar las condiciones iniciales del problema diferencial, es decir,

$$x^0 = 0, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^0 \approx \frac{x^1 - x^0}{\Delta t} = v_0,$$

que conduce al siguiente valor para el primer paso de tiempo

$$x^1 = x^0 + \Delta t\, v_0.$$

De esta forma podemos aplicar la ecuación (1.3) para los restantes pasos de tiempo $n = 1, 2, \ldots$. El método numérico que hemos obtenido (métodod de Numerov) es completamente explícito.

Problema 2. Desarrolle un modelo simplificado de la forma, en estado estacionario, de un cable elástico colgante bajo la fuerza de la gravedad y cuyos extremos están fijos.

Solución. Consideremos la cuerda elástica mostrada en la figura 1.2 cuya longitud sea L y cuyos extremos están fijos.

Para obtener las ecuaciones de la cuerda en estado estacionario, hay que estudiar el equilibrio de fuerzas sobre una sección ds de la misma, como aparece en la figura 1.3, cuya masa $m = \rho\, ds$, donde ρ es la densidad lineal de la cuerda, que supondremos constante para una cuerda homogénea. La tensión sobre los extremos de dicha sección se denotará por T.

Para describir la forma de la cuerda podemos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas (x, y), aunque es más natural utilizar el sistema (s, θ), en el que s es la longitud de la cuerda, y tiene una expresión unívoca en función de x, y θ es la pendiente de la cuerda en un punto dado por x. Utilizando este sistema de coordenadas podemos considerar la tensión como función de la longitud de la cuerda, sea $T(s)$.

Las condiciones de equilibrio de fuerzas, tanto en horizontal como en vertical, en ambos extremos de una sección de la cuerda son

$$\begin{aligned} T\,\cos\theta &= (T + \Delta T)\,\cos(\theta + \Delta\theta), \\ T\,\sin\theta &= (T + \Delta T)\,\sin(\theta + \Delta\theta) + \rho\, g\, \Delta s, \end{aligned}$$

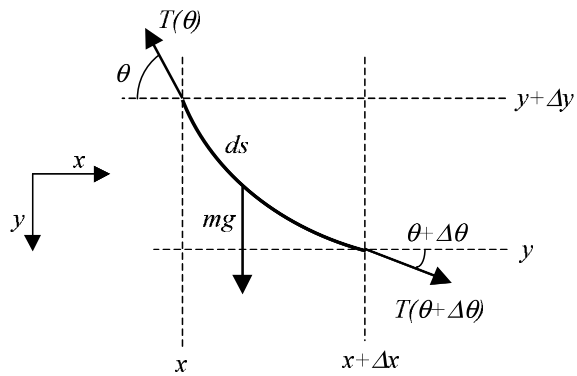

Figura 1.3. Sección de una cuerda elástica de longitud Δs, en estado estacionario mostrando las fuerzas aplicadas sobre la misma.

y aproximando estas ecuaciones por serie de Taylor para $\Delta s, \Delta\theta \ll 1$ se derivan

$$\begin{aligned} T\,\cos\theta &= T\,\cos\theta + \Delta T\,\cos\theta - T\,\sin\theta\,\Delta\theta + O\Big(\Delta T\,\Delta\theta, \Delta\theta^2\Big), \\ T\,\sin\theta &= T\,\sin\theta + \Delta T\,\sin\theta + T\,\cos\theta\,\Delta\theta + \rho\,g + O\Big(\Delta T\,\Delta\theta, \Delta\theta^2\Big), \end{aligned}$$

que aplicando el límite $\Delta s, \Delta\theta \to 0$ y la definición de derivada conducen a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dT}{ds}\cos\theta - T\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}, \\ 0 &= \frac{dT}{ds}\sin\theta + T\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds} + \rho\,g\,\Delta, \end{aligned}$$

y, finalmente, obtenemos las ecuaciones para las vibraciones transversales de la cuerda como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\,(T\,\cos\theta), \\ 0 &= \frac{d}{ds}\,(T\,\sin\theta) + \rho\,g, \end{aligned}$$

que están escritas en función de $T(s)$ y $\theta(s)$.

Para describir la forma de la cuerda conviene introducir la coordenada y, con lo que podemos cambiar al sistema de coordenadas (s, y). Para ello tomamos las siguientes identidades trigonométricas

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\theta = \frac{dy}{ds},$$

que escribiendo x en función de (s, y) de la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad 1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2, \qquad \frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}, \tag{1.4}$$

nos permiten obtener directamente las ecuaciones

$$0 = \frac{d}{ds}\left(T\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\right), \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

$$0 = \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dy}{ds}\right) + \rho\,g. \tag{1.7}$$

Hemos obtenido un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para la tensión $T(s)$ y la forma $y(s)$ de la cuerda en función de su longitud s. Este sistema de ecuaciones se completa con las cuatro condiciones de contorno

$$y(0) = y(L) = 0, \qquad T(0) = T(L), \quad \frac{dT}{ds}(0) = -\frac{dT}{ds}(L). \tag{1.8}$$

Introduciendo la hipótesis adicional de que el desplazamiento transversal de la cuerda es pequeño,

$$\left|\frac{dy}{ds}\right| \ll 1,$$

obtenemos de las ecuaciones (1.4) que

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad s = x,$$

y de (1.5) que

$$\frac{dT}{ds} = 0, \qquad T \equiv \text{const.},$$

con lo que finalmente obtenemos de (1.7)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\rho\,g}{T} = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0,$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal de parámetros constantes, y fácilmente resoluble, por ejemplo mediante transformada de Laplace, dando como solución

$$y(x) = \frac{g\,\rho}{2\,T}\,(L-x)\,x,$$

que tiene forma parabólica.

Las ecuaciones no lineales (1.5) y (1.7) se pueden resolver analíticamente, aunque omitiremos dicha solución, y permiten obtener la catenaria como curva formada por una cuerda colgante en equilibrio. También se pueden resolver dichas ecuaciones numéricamente.

Utilizando un desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$f(s \pm h/2) = f(s) \pm f'(s)\,\frac{h}{2} + f''(s)\,\frac{h^2}{2^2\cdot 2!} \pm f'''(s)\,\frac{h^3}{2^3\cdot 3!} + O\!\left(h^4\right),$$

es fácil comprobar que las siguientes aproximaciones a una función y a su primera derivada,

$$f(s) = \frac{f(s+h/2)+f(s-h/2)}{2} + O\Big(h^2\Big),$$

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{f(s+h/2)-f(s-h/2)}{h} + O\Big(h^2\Big),$$

respectivamente, son de segundo orden en h.

Definiendo una malla para el intervalo $s=[0,L]$ como un conjunto de $N+1$ puntos $\{s^n\}$, con $s^n = n\,h$, $n=0,1,\ldots,N$ y $h=L/N$, y utilizando la notación $f^n \equiv f(s^n)$, podemos escribir las expresiones anteriores de la forma

$$f^n = \frac{f^{n+1/2}+f^{n-1/2}}{2} + O\Big(h^2\Big),$$

$$\left(\frac{df(s)}{ds}\right)^n = \frac{f^{n+1/2}-f^{n-1/2}}{h} + O\Big(h^2\Big),$$

respectivamente.

Aplicando las expresiones en diferencias finitas anteriores a la ecuación (1.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dy}{ds}\right)+\rho\,g\right)^n \\
&= \frac{1}{h}\left(T^{n+1/2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^{n+1/2} - T^{n-1/2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^{n-1/2}\right)+\rho\,g \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{T^{n+1}+T^n}{2}\,\frac{y^{n+1}-y^n}{h} - \frac{T^n+T^{n-1}}{2}\,\frac{y^n-y^{n-1}}{h}\right)+\rho\,g.
\end{aligned}$$

y para la ecuación (1.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{ds}\left(T\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\right)\right)^n \\
&= \frac{1}{h}\left(T^{n+1/2}\sqrt{1-\left(\left(\frac{dy}{ds}\right)^{n+1/2}\right)^2} - T^{n-1/2}\sqrt{1-\left(\left(\frac{dy}{ds}\right)^{n-1/2}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{T^{n+1}+T^n}{2}\sqrt{1-\left(\frac{y^{n+1}-y^n}{h}\right)^2}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{T^n+T^{n-1}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{y^n-y^{n-1}}{h}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido el siguiente sistema de dos ecuaciones en diferencias finitas acopladas para T^n e y^n,

$$
\begin{aligned}
0 &= (T^{n+1}+T^n)\,(y^{n+1}-y^n)-(T^n+T^{n-1})\,(y^n-y^{n-1})+\rho\, g, && (1.9)\\
0 &= \Big((T^{n+1}+T^n)\,\sqrt{h^2-(y^{n+1}-y^n)^2} \\
&\qquad -(T^n+T^{n-1})\,\sqrt{h^2-(y^n-y^{n-1})^2}\Big)\,. && (1.10)
\end{aligned}
$$

Este sistema no lineal de ecuaciones debe ser completado con una versión discreta de las condiciones de contorno (1.8), que para las de tipo Dirichlet pueden ser $y^0=y^N=0$, y para la tensión $T^0=T^N$, y aproximando con primer orden la derivada,

$$T^1-T^0=T^{N-1}-T^N, \qquad (1.11)$$

como es fácil de verificar.

El sistema de ecuaciones resultante ha de ser resuelto mediante un método iterativo, por ejemplo, el método de Newton. Omitiremos los detalles que son similares a los ejemplos anteriores.