CAPÍTULO 3

EJERCICIOS RESUELTOS: CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Ejercicios resueltos[1]

1. La norma p (también llamada l_p) en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Demuestre que cumple los axiomas de norma. Calcule el límite

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p.$$

Solución.

Verifiquemos cada uno de los axiomas de la definición de norma:

(a) $\|x\|_p \geq 0$, con $\|x\|_p = 0$ sólo si $x = 0$.

Esta propiedad es evidente, puesto que $|x_i| \geq 0$.

(b) $\|\alpha\, x\|_p = |\alpha|\, \|x\|_p$.

Es fácil de demostrar ya que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha\, x_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

(c) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Demostrar este resultado es más difícil. Dos números reales positivos p y q tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

se denominan exponentes duales. Dados dos números reales $a, b > 0$ se cumple

$$a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q},$$

para cuya prueba basta observar que para $t \geq 1$,

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q},$$

ya que si evaluamos en $t = 1$ los dos miembros de la desigualdad son iguales, dado que los exponentes son duales, y además para $t > 1$ la derivada del primer miembro es siempre menor que la del segundo, siendo ambas positivas, y por tanto, la función del primer miembro crece más lentamente que la del segundo. Sustituyendo $a/b \geq 1$ o $b/a \geq 1$ se prueba la desigualdad deseada. Tomemos como a y b

$$a = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}, \qquad b = \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q},$$

con lo que obtenemos

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q},$$

y aplicando sumatorios a ambos lados

$$\frac{1}{\|x\|_p\,\|y\|_q}\sum_i |x_i|\,|y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

y de esta expresión es fácil obtener la desigualdad de Minkowski en su versión general

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p\,\|y\|_q.$$

Aplicando sumatorios a la siguiente desigualdad

$$|x_i + y_i|^p \leq |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1},$$

obtenemos

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leq \sum_i |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_i |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1},$$

y aplicando la desigualdad de Minkowski dos veces

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leq \|x\|_p\,\|(x+y)^{p-1}\|_q + \|y\|_p\,\|(x+y)^{p-1}\|_q,$$

que podemos escribir como

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\ \|(x+y)^{p-1}\|_q.$$

Pero como los exponentes son duales

$$\|z^{p-1}\|_q = \left(\sum_i |z_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/q} = \|z\|_p^{p/q},$$

donde hemos usado $(p-1)\,q = p$; como además $p/q = p-1$, obtenemos finalmente

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\ \|(x+y)\|_p^{p-1},$$

es decir, la desigualdad triangular queda demostrada.

Finalmente tenemos que calcular

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} (|x_i|^p)^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \left(|x_{\max}|^p \sum_i \left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p\right)^{1/p}$$

$$= |x_{\max}| \lim_{p\to\infty} \left(\sum_i \left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p\right)^{1/p},$$

donde $x_{\max} = \max_i |x_i|$. Al menos hay un x_i que coincide con el $x_{\max}$, pero puede que haya más de uno, supongamos que hay $r \geq 1$. En ese caso, las $(n-r)$ restantes componentes de x cumplen que

$$\left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{p\to\infty} \left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p = 0,$$

y para las $r \geq 1$ componentes iguales a $x_{\max}$, tenemos que

$$\left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{p\to\infty} (r)^{1/p} = 1,$$

por lo que, finalmente,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_i |x_i| = \|x\|_\infty.$$

2. Demuestre que toda matriz cuadrada tiene una forma normal de Schur, es decir, que es unitariamente semejante a una matriz triangular.

   Solución. Lo demostraremos por inducción. Para $n=1$ es trivialmente cierto. Supongamos que es cierto para toda matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$. Sea A una matriz de orden $n\times n$. Sea λ_1 y x_1 un autovalor de A y uno de sus autovectores asociados, respectivamente, es decir, $A\,x_1 = \lambda_1\,x_1$. Sea x_1 unitario, $\|x_1\|_2 = 1$. Existen $n-1$ vectores $x_2, \ldots, x_n$ que completan a x_1 hasta formar una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. La matriz $U = [x_1, \ldots, x_n]$ con columnas x_i es unitaria, $U^* U = I$. Sea $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$ el primer vector de la base canónica. Entonces, como

$$U^* A U e_1 = U^* A x_1 = \lambda_1 U^* x_1 = \lambda_1 e_1,$$

la matriz $U^* A U$ tiene la forma

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

donde A_1 es una matriz de orden $n-1$ y $a^\top \in \mathbb{C}^{n-1}$. Por hipótesis de inducción existe una matriz unitaria U_1 de orden $n-1$ tal que $U_1^* A U_1$ es una matriz triangular superior.

Finalmente, la matriz

$$V = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$$

es una matriz unitaria de orden n que satisface que

$$\begin{aligned} V^* A V &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{pmatrix} U^* A U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Demuestre que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ tiene descomposición en valores singulares, es decir, se puede factorizar en la forma

$$A = V D U,$$

donde $V \in \mathcal{M}_{m\times m}$ y $U \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices unitarias y $D \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una matriz diagonal. Demuestre también que los valores de la diagonal de D (valores singulares) coinciden con las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz $A^*\,A$ (que es hermítica), es decir, $A^*\,A\,x_i = \sigma_i^2\,x_i$.

<u>Solución</u>. Sea $B = A^*\,A$ una matriz $\mathcal{M}_{n\times m}$. B es una matriz hermítica que es semidefinida positiva, ya que $\langle x, A^*\,A\,x\rangle = \langle A\,x, A\,x\rangle \geq 0$. Una matriz hermítica tiene autovalores reales, y si es semidefinida positiva, éstos son no negativos, ya que $\langle x, B\,x\rangle = \lambda\,\langle x, x\rangle \geq 0$, luego $\lambda \geq 0$. Sean $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ los autovalores de B, que supondremos ordenados de mayor a menor (puede haber repeticiones) $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 = \cdots = \sigma_n^2 = 0$.

Además, sean $\{u_i\}$ un conjunto ortonormal de vectores propios de B (que siempre existe por ser hermítica). De esta forma tenemos que

$$B\,u_i = A^*\,A\,u_i = \sigma_i^2\,u_i.$$

Además, $\|A\,u_i\|_2^2 = \sigma_i^2\,\|u_i\|_2^2 = \sigma_i^2$ y $A\,u_i = 0$ para $i \geq r+1$. Por tanto, el rango

$$r = \text{rango}(A^*\,A) \leq \min\{\text{rango}(A), \text{rango}(A^*)\} \leq \min\{n, m\},$$

ya que si dos filas de A son linealmente dependientes, entonces tras multiplicarlas por A^* lo seguirán siendo (y lo mismo para columnas de A^*).

Sea $U \in \mathcal{M}_{n\times n}$, cuyas filas son los vectores $\overline{u_i}^\top$, es decir, $[u_1, \ldots, u_n]^*$. Sea $v_i = \sigma_i^{-1}\,A\,u_i$, $1 \leq i \leq r$. Los vectores v_i forman un sistema ortonormal, ya que para $1 \leq i, j \leq r$,

$$\langle v_i, v_j\rangle = \langle \sigma_i^{-1}\,A\,u_i, \sigma_j^{-1}\,A\,u_j\rangle = (\sigma_i\,\sigma_j)^{-1}\,\langle u_i, A^*\,A\,u_j\rangle = (\sigma_i\,\sigma_j)^{-1}\,\sigma_j^2\,\delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

Podemos formar una base de $\mathbb{C}^m$ completando esos r vectores ortonormales con otros $v_{r+1}, \ldots, v_m$. Sea $U \in \mathcal{M}_{m\times m}$, cuyas columnas son los vectores $[v_1, \ldots, v_n]$.

Finalmente, sea $D \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriz diagonal que tiene $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ en la diagonal y ceros en las demás posiciones. En tal caso, $V^*\,A\,U^* = D$, ya que

$$(V^*\,A\,U^*)_{ij} = v_i^*\,A\,u_j = \langle v_i, A\,u_j\rangle,$$

que es cero para $j \geq r+1$, y

$$\langle v_i, A\,u_j\rangle = \langle v_i, \sigma_j\,v_j\rangle \sigma_j\,\delta_{ij},$$

para $j \leq r$. Las matrices U y V son unitarias por tener sus columnas y filas ortonormales entre sí, respectivamente.

4. Demuestre que si A es una matriz real cuadrada cuyo radio espectral es menor que la unidad ($\rho(A) < 1$), entonces existe la inversa $(I - A)^{-1}$ y es igual a la serie

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots,$$

que es convergente.

Solución. Si el determinante $|I - A| = 0$, entonces existe al menos un $x \neq 0$ tal que $(I - A)\, x = 0$, por lo que 1 sería un autovalor de A ($A\, x = x$) lo que es imposible ya que $\rho(A) < 1$. Por tanto, $|I - A| \neq 0$, y existe la inversa $(I - A)^{-1}$.

Escojamos una norma $\|\cdot\|$ subordinada tal que $\|A\| < 1$, que existe porque $\rho(A) < 1$. Definamos la suma parcial de la serie pedida

$$B_n = I + A + \cdots + A^n,$$

y recordemos que queremos probar

$$\lim_{n\to\infty} B_n = (I + A)^{-1},$$

es decir, que

$$\lim_{n\to\infty} \|(I + A)^{-1} - B_n\| = 0.$$

Pero sabemos que se cumple que

$$(I - A)\, B_n = I - A^{n+1}, \qquad B_n = (I - A)^{-1}\, (I - A^{n+1}),$$

$$(I - A)^{-1} - B_n = (I - A)^{-1}\, A^{n+1},$$

y entonces

$$0 \leq \|(I - A)^{-1} - B_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\|\, \|A^{n+1}\| \leq \|(I - A)^{-1}\|\, \|A\|^{n+1}.$$

Aplicando el límite a ambos lados y recordando que $\|A\| < 1$ obtenemos el resultado buscado

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} \|(I + A)^{-1} - B_n\| \geq 0.$$

5. Demuestre que si A y B son matrices reales cuadradas, con $|A| \neq 0$, si

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

entonces existe B^{-1}. Además acote la diferencia

$$\|A^{-1} - B^{-1}\|.$$

Solución. Definamos $D = A^{-1}(A - B)$, de forma que se verifica

$$B = A - (A - B) = A\,(I - A^{-1}\,(A - B)) = A\,(I - D).$$

Por hipótesis sabemos que

$$1 > \|A^{-1}\|\,\|A - B\| \geq \|A^{-1}\,(A - B)\| = \|D\|,$$

por lo que $1 > \|D\| \geq \rho(D)$ y por el ejercicio previo, existe $(I - D)^{-1}$, con lo que entonces también existe la inversa

$$B^{-1} = (I - D)^{-1}\,A^{-1}.$$

Seguidamente acotaremos la norma de la inversa

$$\|B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|(I - D)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\,(A - B)\|}.$$

para finalmente acotar la diferencia entre las dos inversas

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}\,(B - A)\,B^{-1}$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|A - B\|\,\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\,\|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A - B\|}.$$

6. Dada una matriz cuadrada A demuestre que

$$|\mathrm{tr}(A)| \leq n\,\rho(A).$$

Si, además, A es hermítica (o simétrica) y definida positiva

$$\mathrm{tr}(A) \geq \rho(A).$$

Solución. Suponiendo conocida la definición de traza

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii},$$

y su equivalencia con la suma de los autovalores de A,

$$\mathrm{tr}(A)| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

obtenemos fácilmente

$$|\mathrm{tr}(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq n\,\max_i |\lambda_i| \leq n\,\rho(A).$$

Por un lado, como A es hermítica, sus autovalores son reales y al ser definida positiva, $\forall x \neq 0$, $\langle x, A\,x\rangle > 0$, estos autovalores son positivos, ya que para $A\,x = \lambda\,x$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$,

$$\langle x, A\,x\rangle = \lambda\,\langle x, x\rangle > 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

Finalmente, como una suma de números positivos es siempre mayor que el mayor de los sumandos

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i \lambda_i \geq \max_i \lambda_i = \max_i |\lambda_i| = \rho(A).$$

7. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

   (a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$,

   (b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$,

   (c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_2$.

   Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

   Solución.

   (a) Como

   $$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \leq n\,\|x\|_\infty,$$

   donde se ha usado que $|x_i|/\|x\|_\infty \leq 1$, tenemos que las normas infinito y uno son equivalentes

   $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty.$$

   (b) Ya que

   $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\|x\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2}{\|x\|_\infty^2}},$$

   por lo mismo que antes

   $$\sqrt{\|x\|_\infty^2} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty^2\,n},$$

   y tenemos que las normas infinito y euclídea son equivalentes

   $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

   (c) Dado que

   $$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_\infty\,\|x\|_1,$$

   y aplicando el apartado (a) obtenemos fácilmente

   $$\|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty\,\|x\|_1} \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty \leq n\,\|x\|_2.$$

8. Dado el polinomio

$$p(x) = b_0 + b_1\, x + \cdots + b_m\, x^m,$$

y la matriz cuadrada A, se define

$$p(A) = b_0\, I + b_1\, A + \cdots + b_m\, A^m.$$

Suponga que la forma canónica de Jordan de A es diagonal, es decir,

$$P^{-1}\, A\, P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dado el polinomio característico de A, $p(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0$, demuestre que $p(A) = 0$.

<u>Solución</u>. Sea el polinomio característico de A

$$p(\lambda) = b_0 + b_1\, \lambda + \cdots + b_n\, \lambda^n.$$

Ya que

$$I = P\, I\, P^{-1}, \qquad A = P\, \Lambda\, P^{-1},$$

$$A^2 = A\, A = P\, \Lambda\, P^{-1}\, P\, \Lambda\, P^{-1} = P\, \Lambda^2\, P^{-1}, \qquad \ldots,$$

tenemos que

$$p(A) = P\, (b_0\, I + b_1\, \Lambda + \cdots + b_n\, \Lambda^n)\, P^{-1},$$

y como el término entre paréntesis es nulo porque $p(\lambda_i) = 0$,

$$p(A) = 0.$$

9. Dada una matriz A cuadrada cuyos autovalores son λ_i y sus autovectores u_i, determine los autovalores y los autovectores de

   (a) $A^m, \qquad m \geq 2,$

   (b) $A^{-1}, \qquad$ suponiendo que $|A| \neq 0$,

   (c) $A + c\, I, \qquad$ donde c es una constante.

   <u>Solución</u>. Dado que $A\, u_i = \lambda_i\, u_i$,

(a)

$$A^m\, u_i = A^{m-1}\, \lambda_i\, u_i = A^{m-2}\, \lambda_i^2\, u_i = \cdots = \lambda_i^m\, u_i,$$

que indica que los autovalores de A^m son λ_i^m y que sus autovectores son los mismos que A.

(b)

$$u_i = A^{-1}\, A\, u_i = \lambda_i\, A^{-1}\, u_i = \lambda_i\, \mu_i\, u_i$$

con lo que

$$A^{-1}\, u_i = \mu_i\, u_i = \frac{1}{\lambda_i}\, u_i,$$

donde $|\lambda_i| \neq 0$ ya que $|A| = \prod_i \lambda_i \neq 0$. Luego los autovalores de A^{-1} son $1/\lambda_i$ y sus autovectores los mismos que los de A.

(c)

$$(A + c\, I)\, u_i = A\, u_i + c\, u_i = (\lambda_i + c)\, u_i.$$

10. Para cualquier matriz A, si U es unitaria y del mismo orden que A, demuestre que

$$\|A\, U\|_2 = \|U\, A\|_2 = \|A\|_2.$$

Solución. La definición de la norma dos como norma matricial subordinada es

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A\, x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Si U es unitaria resulta que

$$\|U\, A\, x\|_2^2 = \langle U\, A\, x, U\, A\, x\rangle = \langle A\, x, U^*\, U\, A\, x\rangle = \|A\, x\|_2^2$$

y por tanto

$$\|U\, A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|U\, A\, x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A\, x\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2.$$

Haciendo $y = U\, x$, tenemos que

$$\|y\|_2^2 = \|U\, x\|_2^2 = \langle U\, x, U\, x\rangle = \langle x, U^*\, U\, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2,$$

por lo que

$$\|A\, U\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A\, U\, x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{\|A\, y\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2.$$

11. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

(a) $\|U\,x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n$,

(b) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U\,x$ y $U\,y$,

(c) $\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$,

(d) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

<u>Solución</u>.

(a)

$$\|U\,x\|_2^2 = \langle U\,x, U\,x\rangle = \langle x, U^*\,U\,x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2,$$

(b) la distancia entre x e y es $\|x - y\|_2$, por lo que

$$\|U\,x - U\,y\|_2 = \|U\,(x - y)\|_2 = \|x - y\|_2,$$

(c)

$$\langle U\,x, U\,y\rangle = \langle x, U^*\,U\,y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(d) Sea $U\,u_i = \lambda_i\,u_i$, entonces

$$\langle u_i, u_i\rangle = \langle U\,u_i, U\,u_i\rangle = \langle \lambda_i\,u_i, \lambda_i\,u_i\rangle = |\lambda_i|^2\,\langle u_i, u_i\rangle,$$

con lo que $|\lambda_i| = 1$.

Los autovectores de una matriz unitaria son linealmente independientes y definen una base ortonormal, por lo que todo vector se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle\,u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,u_i,$$

y por tanto

$$\langle U\,x, U\,x\rangle = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

12. Dada la matriz A hermítica que es definida positiva, es decir, $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle A\,x, x\rangle > 0$, demuestre que A es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

<u>Solución</u>. Sea $A\,u_i = \lambda_i\,u_i$. Sabemos que los autovalores de una matriz hermítica son números reales. Entonces de la definición de matriz definida positiva aplicada a un autovector

$$\langle A\,u_i, u_i\rangle = \lambda_i\,\langle u_i, u_i\rangle > 0$$

obtenemos que el autovalor ha de ser positivo $\lambda_i > 0$, ya que $\langle u_i, u_i\rangle > 0$.

Por otro lado, si A es hermítica con autovalores reales, entonces sus autovectores definen una base ortonormal y $\forall x$,

$$x = \sum_i \alpha_i\, u_i,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\langle A\,x, x\rangle &= \langle A \sum_i \alpha_i\, u_i, \sum_i \alpha_i\, u_i\rangle = \langle \sum_i \lambda_i\, \alpha_i\, u_i, \sum_i \alpha_i\, u_i\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle \lambda_i\, \alpha_i\, u_i, \alpha_j\, u_j\rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i\, \overline{\alpha_i}\, \alpha_j\, \langle u_i, u_j\rangle \\ &= \sum_i \lambda_i\, |\alpha_i|^2 > 0,\end{aligned}$$

por ser una suma de números positivos. Luego A es definida positiva.

13. Defina

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Demuestre que los autovalores de e^A son e^{λ_i} donde λ_i son los autovalores de A. Además demuestre que si B es semejante a A, $P^{-1}\,B\,P = A$, entonces $e^A = P^{-1}\,e^B\,P$.

Solución. Sea $A\,u_i = \lambda_i\,u_i$. Como $A^m\,u_i = \lambda_i^m\,u_i$, entonces

$$e^A\,u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\,u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^m}{m!}\,u_i = e_i^{\lambda}\,u_i.$$

Por otro lado, $A = P^{-1}\,B\,P$ implica que

$$A^m = (P^{-1}\,B\,P)^m = P^{-1}\,B^m\,P,$$

entonces

$$\begin{aligned}e^A = e^{P^{-1}\,B\,P} &= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1}\,B\,P)^m}{m!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1}\,B^m\,P)}{m!} \\ &= P^{-1} \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) P = P^{-1}\,e^B\,P.\end{aligned}$$

14. **Examen 17/abril/1993**. Considere una matriz arbitraria A y una matriz unitaria U. Sabiendo que

$$\|A\,x\|_2^2 = \langle A\,x, A\,x\rangle = x^*\,A^*\,A\,x,$$

(a) determine la relación entre $\|A\|_2$ y $\|U\,A\|_2$,

(b) demuestre que $\|A\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(A^*\,A)$, donde $\lambda_{\max}(A^*\,A)$ es el mayor autovalor de $A^*\,A$ en valor absoluto.

(c) ¿cuál es el vector x para el que $\|A\,x\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^*\,A)$?

(d) demuestre que los autovalores de $A^*\,A$ son reales, positivos o cero, ¿por qué?

(e) ¿cuál es la relación entre $\|A\|_2$ y $\|A^*\|_2$?

(f) ¿cuál es la relación entre los radios espectrales de A y $A^*\,A$, si A es hermítica?

(g) demuestre que para cualquier A arbitraria: $\|A\| \geq \rho(A)$, donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A.

Solución.

(a) Ya que

$$\|U\,A\,x\|_2^2 = \langle U\,A\,x, U\,A\,x\rangle = \langle A\,x, U^*\,U\,A\,x\rangle = \langle A\,x, A\,x\rangle = \|A\,x\|_2^2$$

obtenemos de la definición de norma matricial subordinada que $\|A\|_2 = \|U\,A\|_2$

(b) Como $B = A^*\,A$ es una matriz hermítica, sus autovectores $B\,e_i = \lambda_{Bi}\,e_i$ definen una base ortonormal $\{e_i\}$, todo vector se puede desarrollar como

$$x = \sum_i x_i\,e_i,$$

y por tanto,

$$\|A\,x\|_2^2 = \langle A\,x, A\,x\rangle = \langle x, B\,x\rangle = \langle \sum_i x_i\,e_i, \sum_i x_i\,\lambda_{Bi}\,e_i\rangle$$

$$\leq \lambda_{B\max}\langle \sum_i x_i\,e_i, \sum_i x_i\,e_i\rangle = \lambda_{B\max}\,\|x\|_2^2,$$

y de la definición de norma matricial subordinada se obtiene

$$\|A\|_2^2 \leq \lambda_{B\max} = \lambda_{\max}(A^*\,A).$$

(c) Del apartado anterior se deduce la igualdad

$$\|A\,x\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^*\,A)$$

para el vector unitario x en la dirección del autovector del autovalor de módulo máximo

$$B\,e_{\max} = \lambda_{B\max}\,e_{\max}, \qquad x = \frac{e_{\max}}{\|e_{\max}\|_2}.$$

(d) $B = A^* A$ es una matriz hermítica y por tanto sus autovalores $B\, e_i = \lambda_{Bi}\, e_i$ son reales ya que

$$\langle B\, e_i, e_i \rangle = \overline{\lambda_{Bi}}\, \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_{Bi}\, \langle e_i, e_i \rangle = \langle e_i, B\, e_i \rangle.$$

Además no son negativos

$$0 \le \langle A\, e_i, A\, e_i \rangle = \langle e_i, B\, e_i \rangle = \lambda_{Bi}\, \langle e_i, e_i \rangle,$$

$$\lambda_{Bi} = \frac{\|A\, e_i\|_2^2}{\|e_i\|_2^2} \ge 0.$$

(e) Son iguales entre sí, ya que

$$\|A\, x\|_2^2 = \langle x, B\, x \rangle = \langle x, B^*\, x \rangle = \|A^*\, x\|_2^2.$$

(f) Si A es hermítica ($A = A^*$) y $A\, x = \lambda\, x$, entonces

$$A^*\, A\, x = A^2\, x = \lambda\, A\, x = \lambda^2\, x.$$

Por tanto, $\rho(A^*\, A) = \rho^2(A)$.

(g) Sea $A\, x_i = \lambda_i\, x_i$ con $\|x_i\| = 1$, entonces

$$\|A\, x_i\| = \|\lambda_i\, x_i\| = |\lambda_i|\, \|x_i\| = |\lambda_i| \le \|A\|\, \|x_i\| = \|A\|,$$

por la definición de norma matricial subordinada. Por lo tanto

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \le \|A\|.$$

15. **Examen 23/junio/1993**. Dada la matriz cuadrada A de dimensiones $n \times n$ que es diagonalmente dominante por filas, es decir,

$$|a_{ii}| \ge \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y la definición de norma

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(a) ¿Cuál es el mayor valor de $\|A\|_\infty$ si $|a_{ij}| < \infty$?

(b) Para ese valor de $\|A\|_\infty$, ¿cuál es la solución del sistema $A\, x = 0$? ¿Por qué?

(c) ¿Cuál es el menor valor posible de $\|A\|_\infty$ si $|a_{ij}| < \infty$?

(d) Para ese valor de $\|A\|_\infty$, ¿cuál es la solución del sistema $A\, x = b$ si $\|b\|_\infty \ne 0$? ¿Por qué?

(e) Para cualquier valor de $\|A\|_\infty$ distinto de los obtenidos en los apartados (a) y (c), ¿cuál es la solución del sistema $A\,x = 0$? ¿Por qué?

Solución.

(a) Como A es diagonalmente dominante,

$$2\,|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \Rightarrow \quad \|A\|_\infty \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|.$$

(b) Supongamos que el sistema lineal $A\,x = 0$ tiene una solución distinta de cero. Sea la k-ésima componente de la solución la de valor máximo, es decir,

$$|x_k| = \max_i |x_i| \neq 0.$$

Esta fila k-ésima será

$$a_{kk}\,x_k = -\sum_{i=1,k\neq i}^{n} a_{ki}\,x_i,$$

pero en ese caso tomando valores absolutos

$$|a_{kk}\,x_k| = |a_{kk}|\,|x_k| = \left|\sum_{i=1,k\neq i}^{n} a_{ki}\,x_i\right| \leq \left|\sum_{i=1,k\neq i}^{n} a_{ki}\,|x_k|\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1,k\neq i}^{n} a_{ki}\,|x_k|\right|\,|x_k|,$$

es decir,

$$|a_{kk}| \leq \left|\sum_{i=1,k\neq i}^{n} a_{ki}\,|x_k|\right|$$

que contradice la hipótesis de dominancia diagonal. Por tanto, por reducción al absurdo, la única solución es $x_i = 0$, es decir, $x = 0$.

(c) El mínimo valor de $\|A\|_\infty = 0$, y se da para la matriz nula $A = 0$, es decir, $a_{ij} = 0$.

(d) Para ese valor el sistema $A\,x = b$ es incompatible a no ser que $b = 0$, en cuyo caso no existe sistema alguno.

(e) El teorema del rango nos dice que la solución del sistema $A\,x = 0$ para una matriz cualquiera será nula salvo que $|A| = 0$, en cuyo caso existirán infinitas soluciones. Nota: una matriz diagonalmente dominante puede ser singular (tener determinante nulo).

16. **Examen 14/febrero/1995**. Demuestre que si $A = U^\top U$ donde $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, U^{-1} existe y U es una matriz triangular superior tal que la multiplicidad geométrica de sus autovalores coincide con la algebraica, entonces

    (a) $|A| = \det(A) \neq 0$,

    (b) A es simétrica y positiva definida,

    (c) determine la relación entre los autovalores de A y los de U,

    (d) ¿cuál es la relación entre los autovectores de A y los autovectores de U?

    Solución.

    (a) $|A| = |U^\top U| = |U^\top|\,|U| = |U|^2$ y como por hipótesis existe U^{-1}, $|U| \neq 0 \neq |A|$.

    (b) A es simétrica ya que $(U^\top U)^\top = U^\top U$. Por ser A simétrica también es hermítica y sus autovalores son reales no negativos, ya que, para $Ax = \lambda_A x$,

    $$0 \leq \langle U\,x, U\,x\rangle = \langle x, U^\top U\,x\rangle = \langle x, A\,x\rangle = \lambda_A \langle x, x\rangle.$$

    Como A es hermítica (simétrica) sus autovectores forman una base del espacio $\mathbb{R}^n$, sea $\{e_i\}$ esta base ortonormal, $A\,e_i = \lambda_{Ai}\,e_i$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, por lo que

    $$\langle x, A\,x\rangle = \langle \sum_j x_j\,e_j, A\,\sum_i x_i\,e_i\rangle = \sum_i \sum_j x_j\,\lambda_{Ai}\,x_i\,\langle e_j, e_i\rangle$$
    $$= \sum_i x_i^2\,\lambda_{Ai} > 0,$$

    por ser las coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$ y los autovalores positivos.

    (c) Los autovalores de U, $U\,w_j = \lambda_{Uj}\,w_j$, coinciden con los elementos de su diagonal principal $\lambda_{Uj} = u_{jj}$, ya que U es triangular superior. Los autovalores de $U^\top$ también son los elementos de su diagonal principal y coinciden por tanto con los de U, $U^\top v_j = u_{jj}\,v_j$.

    Por otro lado, al ser A hermítica sus autovectores forman una base por lo que

    $$w_i = \sum_j b_{ij}\,e_j.$$

    Aplicando la matriz A a los autovectores de U obtenemos

    $$\langle w_i, A\,w_i\rangle = \langle U\,w_i, U\,w_i\rangle = \lambda_{Ui}^2\,\langle w_i, w_i\rangle$$
    $$= \lambda_{Ui}^2\,\langle \sum_j b_{ij}\,e_j, \sum_j b_{ij}\,e_j\rangle = \lambda_{Ui}^2\,\sum_j b_{ij}^2,$$

$$\langle w_i, A\, w_i\rangle = \langle \sum_j b_{ij}\, e_j, A \sum_j b_{ij}\, e_j\rangle = \langle \sum_j b_{ij}\, e_j, \sum_j b_{ij}\, \lambda_{Aj}\, e_j\rangle$$

$$= \sum_j b_{ij}^2\, \lambda_{Aj} \langle e_j, e_j\rangle = \sum_j b_{ij}^2\, \lambda_{Aj},$$

por lo que la relación buscada entre los autovalores es

$$\lambda_{Ui}^2 = \frac{\sum_j b_{ij}^2\, \lambda_{Aj}}{\sum_j b_{ij}^2}.$$

(d) Ya hemos determinado una relación entre los autovectores de A y los de U, es decir, los autovectores de U son combinación lineal de los de A,

$$w_i = \sum_j b_{ij}\, e_j.$$

Sin embargo, si tomamos en cuenta la hipótesis de que la multiplicidad geométrica de los autovalores de U coincide con su multiplicidad algebraica, entonces los autovectores de U también definen una base de $\mathbb{R}^n$ que puede ortonormalizarse (por el procedimiento de Gram-Schimdt), sea $\{w_j\}$ dicha base. En ese caso la matriz de cambio B es una matriz cuadrada y unitaria (ya que sus columnas son vectores elementos de dicha base de autovectores),

$$1 = \|e\|_2 = \|w\|_2 = \|B\, e\|_2 \le \|B\|_2, \qquad \|B\|_2 \ge \frac{\|B\, e\|_2}{\|e\|_2} = 1.$$

Los autovectores de A se relacionan con los de U mediante una transformación unitaria (ortogonal). Geométricamente se trata de una isometría, es decir, una (hiper-) rotación respecto a algún eje o una (hiper-) simetría respecto a algún plano en $\mathbb{R}^n$.

17. **Examen 29/Abril/1995**. Dado el vector columna $w \in \mathbb{C}^n$ con $\|w\|_2 = \sqrt{\overline{w}^\top w} = 1$, defina la matriz

$$A = I - 2\, w\, \overline{w}^\top.$$

¿Cuál son las propiedades de la matriz A? Nota: debido a dichas propiedades, está matriz es muy usada en el cálculo de autovalores.

Solución.

(a) Aplicando la traspuesta conjugada o hermítica se obtiene

$$A^* = I^* - 2\, \overline{(\overline{w}^\top)}^\top\, \overline{w}^\top = I - 2\, w\, \overline{w}^\top = A,$$

es decir, que esta matriz es hermítica, y por tanto

(b) su forma normal de Schur es diagonal y coincide con su forma canónica de Jordan, es decir, es diagonalizable;

(c) sus autovalores son reales y de cuadrado no negativo, $\lambda^2 \geq 0$;

(d) y sus autovectores son linealmente independientes y forman una base en $\mathbb{C}^n$.

(e) Por otro lado, como

$$A\,A^* = A^2 = (I - 2\,w\,\overline{w}^\top)\,(I - 2\,w\,\overline{w}^\top)$$

$$= I - 4\,w\,\overline{w}^\top + 4\,\|w\|_2\,w\,\overline{w}^\top = I = A^*\,A,$$

resulta que también es unitaria, y por tanto,

(f) $\langle A\,x, A\,x\rangle = \langle x, x\rangle = |\lambda|^2\,\langle x, x\rangle$, y sus autovalores reales son de módulo unidad $|\lambda| = 1$. obviamente todos los reales son de de cuadrado no negativo.

(g) Dado que w es un autovector asociado al autovalor -1,

$$Aw = (I - 2\,w\,\overline{w}^\top)w = w - 2w = -w,$$

la matriz A no es definida positiva. De hecho, sus autovalores son 1 y -1 con multiplicidad algebraica $n-1$ y 1, respectivamente.

18. **Examen 6/Julio/1996**. Demuestre que la norma de Frobenius $F(A)$ de una matriz cuadrada compleja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cumple los axiomas de una norma,

$$F(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}.$$

<u>Solución</u>.

(a) Es evidente que $F(A) \geq 0$ y sólo $F(A) = 0$ cuando $A = 0$.

(b) También es fácil comprobar que $F(\alpha\,A) = |\alpha|\,F(A)$, ya que

$$F(\alpha\,A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha|^2\,|a_{ij}|^2} = |\alpha|\,F(A).$$

(c) La desigualdad triangular $F(A+B) \leq F(A) + F(B)$, se prueba fácilmente

$$F^2(A+B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij} + b_{ij}|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|^2 + |b_{ij}|^2 + 2\,|a_{ij}|\,|b_{ij}|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|b_{ij}|;$$

aplicando dos veces la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la norma vectorial euclídea una vez respecto del índice i y la otra respecto del índice j en los sumatorios del último término de esta expresión, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2}$$

es decir,

$$F^2(A+B) \leq F^2(A) + F^2(B) + 2\,F(A)\,F(B)$$

$$= (F(A) + F(B))^2.$$

(d) La norma matricial de Frobenius es submultiplicativa, $F(A\,B) \leq F(A)\,F(B)$, como se demuestra fácilmente

$$F(A\,B) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)^{1/2}$$

$$= F(A)\,F(B),$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre el sumatorio con índice k en la primera desigualdad.

(e) También comprobamos que es consistente con la norma vectorial euclídea, es decir, $\|A\,x\|_2 \leq F(A)\,\|x\|_2$,

$$\|A\,x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j\right|^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)} = F(A)\, \|x\|_2$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre el sumatorio con índice j en la primera desigualdad..

19. **Examen 26/Abril/1997**. Sean las matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que U es unitaria. Si la norma de Frobenius $F(A)$ es

$$F(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

donde $A = (a_{ij})$, se pide encontrar

(a) la relación entre $F(A\,U)$ y $F(A)$ para cualquier A,

(b) la relación entre $F(U\,A)$ y $F(A)$ para cualquier A,

(c) una cota superior y otra inferior para $\|A\|_2$ en función de $F(A)$ en el caso de que A sea hermítica,

(d) la relación entre $F(A)$ y los autovalores de A si A es hermítica.

<u>Solución</u>.

(a) Operando con la definición de norma de Frobenius obtenemos

$$F^2(A\,U) = \sum_i \sum_j \left| \sum_k a_{ik}\, u_{kj} \right|^2$$

$$= \sum_i \sum_j \left(\sum_k a_{ik}\, u_{kj} \right) \left(\sum_l \overline{a_{il}}\, \overline{u_{lj}} \right)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ik}\, u_{kj}\, \overline{a_{il}}\, \overline{u_{lj}}$$

$$= \sum_i \sum_k \sum_l a_{ik}\, \overline{a_{il}} \sum_j u_{kj}\, \overline{u_{lj}},$$

pero como U es unitaria,

$$U\,U^* = I \quad \Rightarrow \quad \sum_k u_{ik}\, \overline{u_{jk}} = \delta_{ij},$$

tenemos que

$$F^2(A\,U) = \sum_i \sum_k \sum_l a_{ik}\,\overline{a_{il}}\,\delta_{kl} = \sum_i \sum_k a_{ik}\,\overline{a_{ik}} = F^2(A).$$

(b) Se puede probar que $F(U\,A) = F(A)$ para cualquier A de forma del todo similar a la presentada en el apartado anterior. Por ello, ofreceremos una variante de dicha demostración. Denotemos las columnas de A como a_j, es decir, $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, de tal forma que la norma de Frobenius se puede escribir como

$$F(A) = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_i \|a_j\|_2^2}.$$

Como sabemos que una matriz unitaria tiene norma unidad, es decir,

$$\|U\,x\|_2^2 = \langle U\,x, U\,x\rangle = \langle x, U^*\,U\,x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2,$$

la demostración deseada es directa

$$F(U\,A) = \sqrt{\sum_i \|U\,a_j\|_2^2} = \sqrt{\sum_i \|a_j\|_2^2} = F(A).$$

(c) Obtener una cota superior para $\|A\|_2$ en función de $F(A)$ para A arbitraria es relativamente fácil, ya que sabemos que la norma de Frobenius es consistente con la norma vectorial euclídea, es decir, $\|A\,x\|_2 \leq F(A)\,\|x\|_2$ (como se probó en el ejercicio anterior), luego

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|A\,x\|_2}{\|x\|_2} \leq F(A),$$

es decir, $\|A\|_2 \leq F(A)$.

Para obtener una cota inferior utilizaremos el hecho de que A es una matriz hermítica ($A^* = A$). La forma normal de Schur para una matriz hermítica es diagonal y contiene sus autovalores λ_i en la diagonal principal, es decir, existe una matriz U unitaria tal que

$$U^*\,A\,U = \Lambda = (\Lambda_{ii}) = (\lambda_i)$$

y por tanto, utilizando los dos apartados anteriores

$$F(A) = F(U^*\,A\,U) = F(\Lambda) = \sqrt{\sum_i \lambda_i}.$$

Por otro lado, para una matriz hermítica

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_i \lambda_i,$$

como ya hemos probado en ejercicios anteriores. Por tanto, la cota inferior buscada es

$$F(A) \leq \sqrt{n\,\rho^2(A)} = \sqrt{n}\,\|A\|_2.$$

Finalmente hemos demostrado que la norma dos y la de Frobenius son normas equivalentes entre sí para matrices hermíticas

$$\frac{F(A)}{\sqrt{n}} \leq \|A\|_2 \leq F(A).$$

Se puede demostrar que en cualquier espacio vectorial normado de dimensión finita todas las normas son equivalentes entre sí, es decir, que nuestra demostración para A hermítica se puede generalizar para A cualquiera, aunque la omitiremos.

(d) Como resultado de la solución del apartado anterior, hemos obtenido para A hermítica,

$$F(A) = \sqrt{\sum_i \lambda_i}.$$

20. **Examen 17/Diciembre/1996**. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de números reales cuyos autovalores son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) y cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,\lambda + a_n = 0.$$

Se pide:

(a) Calcular la traza de A^k, $k = 1, 2, \ldots$, en función de los autovalores de A.

(b) Calcular A^n en función de $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

(c) Calcular A^{n+2} utilizando $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

(d) ¿Se puede poner A^n en forma triangular superior o inferior? ¿Por qué? Si se puede, muestre como.

(e) Calcular e^A utilizando los resultados anteriores.

(f) ¿Qué condición deben cumplir los autovalores para que el sistema $A\,x = b$ tenga solución única? ¿Por qué?

(g) Si $A\,x = b$ tiene infinitas soluciones, ¿qué puede decir acerca de los autovalores de A, la matriz ampliada $[A; b]$, y las filas y columnas de A? ¿Por qué?

<u>Solución</u>.

(a) Sabemos que la traza es un invariante de una matriz ante transformaciones de semejanza. Además por el teorema de la forma normal de Schur para matrices reales, $\exists Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ortogonal $Q^\top Q = I$, tal que $Q^\top A\, Q = T$ es una matriz triangular superior.

Por otro lado, es fácil probar que A^k y T^k son semejantes,

$$Q^\top A^k\, Q = T^k,$$

y por tanto tienen los mismos autovalores, por lo que

$$\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

(b) El teorema de Cayley-Hamilton indica que

$$p(A) = A^n + a_1\, A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, A + a_n\, I = 0.$$

luego

$$A^n = -a_1\, A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}\, A - a_n\, I.$$

(c) Sustituyendo la potencia A^n y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\, A^n = -a_1\, A^n - a_2\, A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}\, A^2 - a_n\, A \\ &= -a_1\, \big(-a_1\, A^{n-1} - a_2\, A^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\, A - a_n\, I\big) \\ &\quad - a_2\, A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}\, A^2 - a_n\, A \\ &= (a_1^2 - a_2)\, A^{n-1} + (a_1\, a_2 - a_3)\, A^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (a_1\, a_{n-1} - a_n)\, A + a_1\, a_n\, I. \end{aligned}$$

y de igual forma

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= (a_1^2 - a_2)\, A^n + \cdots + (a_1\, a_{n-1} - a_n)\, A^2 + a_1\, a_n\, A \\ &= (a_1^2 - a_2)\, \big(-a_1\, A^{n-1} - a_2\, A^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\, A - a_n\, I\big) \\ &\quad + (a_1\, a_2 - a_3)\, A^{n-1} + \cdots + (a_1\, a_{n-1} - a_n)\, A^2 + a_1\, a_n\, A \\ &= \big(a_1\, a_2 - a_3 - a_1\, (a_1^2 - a_2)\big)\, A^{n-1} + \cdots \\ &\quad + \big(a_1\, a_n - a_n\, (a_1^2 - a_2)\big)\, I. \end{aligned}$$

(d) El teorema de la forma normal de Schur de A nos permite poner A^n en forma triangular superior mediante una transformación de semejanza de la siguiente forma,

$$Q^\top A^n Q = T^n.$$

(e) Sabemos que

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

por lo que

$$Q^\top e^A Q = Q^\top \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^T,$$

y, como Q es ortogonal,

$$e^A = Q\, e^T Q^\top.$$

(f) El sistema $A\,x = b$ tiene solución única si el determinante de A no es nulo, $|A| \neq 0$, y por tanto existe la inversa A^{-1}. Como sabemos que el determinante es igual al producto de los autovalores, la condición en éstos es que sean todos distintos de cero, es decir,

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall \lambda_i \neq 0.$$

(g) $A\,x = b$ tiene infinitas soluciones si $|A| = 0$ y por el teorema del rango $\text{rango}(A) = \text{rango}([A; b]) < n$. La condición sobre el determinante implica que al menos un autovalor de A es nulo. La condición sobre los rangos de la matriz A y de la matriz ampliada $[A; b]$ indican que al menos una fila (o columna) de dichas matrices es combinación lineal de las demás filas (o columnas).

21. **Examen 2/Febrero/1998**. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de números reales que se descompone como

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = B + C,$$

donde

$$B = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right), \qquad C = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right).$$

(a) ¿Cuál es la forma normal de C? Demuéstrelo.

(b) ¿Qué propiedades tienen los autovalores de C? Demuestre.

(c) Teniendo en cuenta los resultados de (a) y (b), deduzca las condiciones que se deben satisfacer para que $|C| = \det(C) = 0$.

(d) ¿Es la matriz C definida positiva?

(e) ¿Cuál es la forma canónica de Jordan de la matriz C?

Solución.

(a) Escribiendo $A = (a_{ij})$ y $C = (c_{ij})$, tenemos que

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}), \qquad c_{ii} = 0, \qquad c_{ij} = -c_{ji},$$

por lo que C es antisimétrica.

Por el teorema de la forma normal de Schur, existe una matriz Q unitaria ($Q^* Q = I$), tal que $Q^* C Q = T$ es una matriz triangular superior. Ahora bien, como C es una matriz real y antisimétrica $C^* = C^\top = -C$, por lo que

$$T^* = -Q^* C Q = -T, \qquad T^* = -T,$$

con lo que T es una matriz diagonal de números imaginarios puros.

(b) Ante transformaciones de semejanza se preservan los autovalores, los autovalores de la matriz diagonal $D = T = Q^{-1} C Q$ lo serán también de C. Detallando la demostración, sabemos que

$$C Q = Q D = D Q,$$

donde se ha usado que una matriz diagonal conmuta con cualquier otra. Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ los autovectores de C, podemos definir la matriz unitaria $Q = [e_1, \ldots, e_n]$ (mediante sus vectores columna) y por tanto

$$C e_i = D_{ii} e_i = \lambda_i e_i,$$

es decir, los autovalores de C son los números imaginarios puros que aparecen en la diagonal de la forma normal de Schur D de C.

(c) Los autovalores de $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se calculan por medio de la raíces de su polinomio característico

$$|C - \lambda I| = 0,$$

que es un polinomio de grado n de coeficientes reales. El teorema fundamental del álgebra exige que sus raíces complejas aparezcan en pares conjugados. Ahora bien, los autovalores de C son imaginarios puros, por lo que $\lambda = \pm\beta\, i$, con $\beta \in \mathbb{R}$ y $i = \sqrt{-1}$. Más aún,

$$|Q^* C Q| = |T| = |D| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = |Q^*|\,|C|\,|Q| = |C|,$$

porque $Q^* Q = I$ implica que $|Q^* Q| = |Q^*|\,|Q| = |I| = 1$.

Por tanto, si n es par

$$|C| = \prod_{k=1}^{n/2} \beta_k^2,$$

y si n es impar $|C| = 0$, porque al menos un autovalor es necesariamente real e igual a cero. Para n par, también se puede dar $|C| = 0$ si al menos un autovalor (y su complejo conjugado) es cero.

(d) Una matriz C es definida positiva si

$$\langle x, C\,x \rangle > 0, \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Sin embargo, si C es antisimétrica ($c_{ii} = 0, c_{ij} = -c_{ji}$),

$$\langle x, C\,x \rangle = x^\top C\,x = \sum_i \sum_j c_{ij}\,x_i\,x_j = \sum_{1 \le i < j \le n} (c_{ij} + c_{ji})\,x_i\,x_j = 0,$$

no puede ser definida positiva, aunque sí definida no negativa.

(e) La forma canónica de Jordan de la matriz C se puede determinar mediante su forma normal de Schur y, por tanto, es diagonal con elementos que son imaginarios puros.