

PREGUNTAS CORTAS DE TEORÍA (PRIMER PARCIAL 2000/2001)

1. Describa la forma de Lagrange del polinomio interpolador y la fórmula de su error.
2. Describa la forma de Newton del polinomio interpolador y la fórmula de su error.
3. Definición de diferencias divididas. ¿Cuánto vale  $f[x, x, x]$ ? (Demuéstrelo).
4. Escriba la expresión del polinomio de interpolación en una malla uniforme utilizando el operador en diferencias finitas  $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ , y escriba la fórmula de su error.
5. Escriba la expresión del polinomio de interpolación en una malla uniforme utilizando el operador en diferencias finitas  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ , y escriba la fórmula de su error.
6. Defina la interpolación de Hermite.
7. Defina las curvas esplines de orden  $m$ .
8. ¿Cómo es el sistema de ecuaciones lineales a que conduce la interpolación local mediante esplines cúbicas? ¿Qué condiciones de contorno aplicables a la interpolación mediante esplines cúbicas conducen a un sistema lineal de coeficientes con matriz simétrica, definida positiva y diagonalmente dominante?
9. Describa el polinomio trigonométrico más general de grado  $n$  y cómo puede ser utilizado para interpolar una función.
10. ¿Cuál es el operador adjunto del operador  $\mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L}(y) \equiv pD^2y + qDy + ry$  y  $D = d/dx$ ? ¿Se puede transformar dicho operador en un operador auto-adjunto? ¿Cómo?
11. ¿Para qué condiciones de contorno el problema de valores propios de un operador Sturm-Liouville es auto-adjunto? Demuestrelo.
12. Sea una función  $f \in L_{2,w}(a, b)$  y una base ortogonal  $\{y_i\}$  de dicho espacio, cuál es el desarrollo de esta función en dicha base.

13. Defina la transformada de Fourier discreta de la función discreta  $\{f_n\}_{n=0}^N$ .
14. ¿Cuál es el orden de complejidad (número de operaciones) de la transformada rápida de Fourier? ¿Por qué se le llama rápida? Mencione los nombres de autores de algún algoritmo de transformada rápida que conozca.
15. Dada la malla  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$ , dibuje, de forma aproximada, las funciones de una base del espacio  $V_h^{(3)}$  de polinomios cúbicos a trozos continuos y diferenciables (de Hermite). ¿Cuántos elementos tiene la base?
16. Defina el espacio  $W_h^{(1)}$  de polinomios lineales a trozos discontinuos. Dibuje una base de dicho espacio. ¿Cuántos elementos tiene dicha base?
17. Defina el espacio  $V_h^{(1)}$  de polinomios lineales a trozos continuos. Dibuje una base de dicho espacio. ¿Cuántos elementos tiene dicha base?
18. Defina la traspuesta hermítica de una matriz  $A^*$ . Sea  $w$  un vector columna, cuáles son las propiedades de  $w^*w$ . ¿Y de  $ww^*$ ?
19. Defina las notaciones  $g(x) = O(f(x))$  y  $g(x) = o(f(x))$ .
20. ¿Qué es un número en coma fija y cómo se representa en un ordenador (en forma binaria)?
21. ¿Qué es un número en coma flotante y cómo se representa en un ordenador (en forma binaria)?
22. Para una representación de números flotantes con exponente de 7 dígitos binarios, ¿cómo es el exponente?
23. En un sistema de representación de números flotantes con base  $b = 10$ , longitud del exponente  $e = 0$  y dígitos de la mantisa  $n = 3$ , ¿cuál es el mínimo número, en valor absoluto, representable? ¿y el siguiente número? ¿y el positivo más grande?
24. Sea la sucesión  $x_n = x_{n-1}^2$ , si  $y_n = fl(x_n)$  y  $y_0 = x_0(1 + \delta)$ , ¿cuál es el error relativo entre  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$ ?
25. Realice un análisis de errores (flotantes) hacia atrás de la multiplicación  $(xy)$ .

26. Estudie el condicionamiento de la evaluación de la función  $f(x) = 1 - \cos(x)$ . ¿Hay diferencias cancelativas? En su caso, ¿cómo las evitaría?
27. Cómo se calculan las raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  para evitar posibles cancelaciones catastróficas.
28. Estudie el número de condición de la función  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ . Estudie la posibilidad de cancelaciones catastróficas y cómo evitarlas en su caso.
29. Defina el número de condicionamiento para la evaluación de una función  $f(x)$ . ¿Cómo se suele calcular si la función es derivable?
30. Defina el epsilon de la máquina. En un sistema de aritmética flotante de mantisa de 10 dígitos binarios, ¿cuánto vale? ¿Cómo la calcularía en un ordenador cuyo sistema de representación flotante le fuera desconocido?
31. Cómo se escribe en binario el número  $1/3$  en un sistema de aritmética flotante con mantisa de 8 dígitos y exponente de 4.
32. Defina error relativo, absoluto, por truncado y por redondeo.
33. En doble precisión se trabaja con 64 bits, de los que 11 se reservan para el exponente. ¿Cuál es la longitud de la mantisa? ¿Cuál es el rango de posibles exponentes?
34. Demuestre que la norma  $\|x\|_\infty$  es equivalente a la norma  $\|x\|_1$  en  $\mathbb{R}^n$ .
35. Demuestre que la norma  $\|x\|_\infty$  es equivalente a la norma  $\|x\|_2$  en  $\mathbb{R}^n$ .
36. Demuestre que la norma  $\|x\|_1$  es equivalente a la norma  $\|x\|_2$  en  $\mathbb{R}^n$ .
37. ¿Qué es una matriz  $U$  unitaria? ¿Cuáles son sus propiedades? Ayuda: en relación a su forma, norma, autovalores, etc.
38. ¿Bajo qué condiciones los autovectores de una matriz  $A$  ( $n \times n$ ) forman una base del espacio  $\mathbb{R}^n$ ? ¿Cuál es la forma de Jordan general de esa matriz?
39. Defina norma matricial, norma asociada a una norma vectorial y norma submultiplicativa.

40. Defina la norma matricial de Frobenius y su relación con la norma 2. ¿Con qué norma vectorial está asociada?
41. ¿Cuál es la relación entre el radio espectral y la norma 2 de una matriz cualquiera? ¿Y si la matriz es simétrica?
42. Factorización de Cholesky. Ponga un ejemplo de una matriz general (a la que sea aplicable) de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .
43. ¿Cuál es el coste computacional de la regla de Cramer (en número de operaciones)? ¿Y de la eliminación de Gauss? ¿Y de la factorización de Cholesky?
44. Calcule la suma de la serie finita  $\sum_{j=1}^n j^2$ .
45. ¿Qué es la factorización de Doolittle? ¿En qué se diferencia de la de Crout? ¿Y de la de Cholesky?
46. ¿Qué es la factorización de Cholesky modificada? ¿Qué ventajas tiene sobre la factorización de Cholesky? Si se ha calculado la factorización de Cholesky, ¿cómo se determina la factorización de Cholesky modificada?
47. Deduzca (con detalle) el algoritmo (general) de factorización  $LU$  de Crout.
48. Deduzca (con detalle) el algoritmo (general) de factorización  $LU$  de Doolittle.
49. Deduzca (con detalle) el algoritmo (general) de factorización  $LU$  de Cholesky.
50. Deduzca (con detalle) el algoritmo (general) de factorización  $LU$  de Cholesky modificado.
51. Definición de número de condición de una matriz. ¿Cuál es la relación entre el error relativo respecto a cambios en el vector  $b$  en la solución del problema  $Ax = b$  y el número de condición de  $A$ ?
52. Definición de número de condición de una matriz. ¿Cuál es la relación entre el error relativo respecto a cambios en la matriz  $A$  en la solución del problema  $Ax = b$  y el número de condición de  $A$ ?

53. ¿Qué relación existe entre el residuo de la solución numérica de una ecuación lineal y el error de la misma? Justifique detalladamente su respuesta.
54. ¿Qué es la técnica de pivotaje completo? ¿En qué se diferencia de la técnica de pivotaje parcial?
55. Sea la matriz  $H$  cuyos elementos  $(H)_{ij} = h_{ij}$  dados por  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ . ¿Está bien condicionada esta matriz? ¿Por qué?
56. Escriba la expresión matricial del método de Gauss-Jacobi. Escriba la expresión con índices.
57. Escriba la expresión matricial del método de Gauss-Seidel. Escriba la expresión con índices.
58. Escriba la expresión matricial del método de Gauss-Jacobi. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente de convergencia del método?
59. Escriba la expresión matricial del método de Gauss-Seidel. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente de convergencia del método?
60. Enuncie todas las condiciones suficientes que conozca que garanticen la convergencia del método Gauss-Seidel. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente?
61. Escriba la expresión matricial de un método de sobrerrelajación basado en el método de Gauss-Jacobi. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para la convergencia del método?
62. Escriba la expresión matricial de un método de sobrerrelajación basado en el método de Gauss-Seidel. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para la convergencia del método?
63. ¿Para qué tipo de matrices se puede utilizar el método del gradiente conjugado?. Describa brevemente dicho método.
64. Escriba un funcional cuyo mínimo sea la solución de  $Ax = b$  con  $A$  simétrica definida positiva. Describe el método del descenso más rápido para determinar dicho mínimo.

65. ¿Qué son vectores  $A$ -conjugados? ¿Qué propiedades tiene que tener  $A$ ? ¿Puede convertir un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes en un conjunto de vectores  $A$ -conjugados? Describa un método para hacerlo.
66. Describa el método del descenso más rápido para resolver un sistema lineal  $Ax = b$  utilizando direcciones  $A$ -conjugadas. ¿Cuántas iteraciones requiere dicho método en aritmética exacta?
67. Describa el método de la posición falsa o regla falsi. ¿Cuándo converge dicho método?
68. Describa el método de Steffensen para  $f(x) = 0$ . ¿Cuándo converge dicho método?
69. Escriba la formulación delta del método de Newton aplicado a un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. ¿Cuándo converge dicho método?
70. La regla de Descartes para raíces de polinomios.
71. Describa la aplicación del teorema de Gershgorin a la acotación de raíces de polinomios.