

## PREGUNTAS CORTAS DE TEORÍA

1. Determina una aproximación a la derivada de una función  $f(x)$  en el punto  $x_0$  utilizando el polinomio interpolador de Newton de grado 2 que coincide con  $f$  en los puntos  $x_{-1}$ ,  $x_0$  y  $x_1$ . ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?
2. Determina una aproximación a la derivada de una función  $f(x)$  en el punto  $x_0$  utilizando los puntos  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ . ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?
3. Determina una aproximación a la derivada de una función  $f(x)$  en el punto  $x_N$  utilizando los puntos  $x_N$ ,  $x_{N-1}$  y  $x_{N-2}$ . ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?
4. Determina una fórmula en diferencias finitas centrada para la segunda derivada de cuarto orden de precisión.
5. Enuncia el teorema del valor medio para integrales.
6. Fórmula del rectángulo y error de integración.
7. Fórmula del punto medio y error de integración.
8. Fórmula del trapecio y error de integración.
9. Fórmula del trapecio mejorada y error de integración.
10. Fórmula de Simpson y error de integración.
11. ¿Para qué polinomios es exacta la fórmula del trapecio? Justifica la respuesta.
12. ¿Para qué polinomios es exacta la fórmula del Simpson? Justifica la respuesta.
13. ¿Qué es una fórmula de cuadratura gaussiana? ¿Qué error se comete al utilizarla? ¿Para qué polinomios se puede asegurar que una determinada fórmula de cuadratura gaussiana es exacta?
14. Explica el método de extrapolación de Richardson.
15. ¿En qué consiste la técnica de integración de Romberg?

16. ¿Qué método utilizarías para aproximar el valor de una integral de la forma  $\int_a^\infty f(x)dx$ ?
17. Método numérico general para la resolución de un problema de valores iniciales con ecuaciones diferenciales ordinarias.
18. Teorema de equivalencia de Lax. Explica el significado de las propiedades de los métodos a los que hace referencia.
19. ¿Qué propiedades de un método numérico para un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias puedes analizar utilizando el polinomio característico? Escribe la expresión del polinomio característico para un método general y establece la relación entre éste y las propiedades del método.
20. Método de Euler explícito. Demuestra que es convergente. Estudia su estabilidad lineal.
21. Método de Euler implícito. Demuestra que es convergente. Estudia su estabilidad lineal.
22. Método del trapecio para problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias. Demuestra que es convergente. Estudia su estabilidad lineal.
23. Métodos de Runge-Kutta explícitos. Forma general.
24. ¿Qué es un método de Adams-Basforth?
25. ¿Qué es un método de Adams-Moulton?
26. ¿Qué es un método predictor-corrector?
27. ¿Cuándo se dice que un método multipaso lineal para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es fuertemente estable?
28. ¿Cuándo se dice que un método multipaso lineal para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es débilmente estable?

29. ¿Cuándo se dice que un método multipaso lineal para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es absolutamente estable?
30. ¿Cuándo se dice que un método multipaso lineal para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es relativamente estable?
31. Enuncia un teorema relativo a la existencia y unicidad de solución para un problema de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias.
32. ¿En qué consiste un método de diferencias finitas para problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias? Explica cómo tratar los distintos tipos de condiciones de contorno.
33. ¿Qué es un método de shooting o de disparo?
34. ¿Qué es un método de Galerkin?
35. ¿Qué es un método de colocación?
36. ¿Qué es un método de residuos ponderados?
37. ¿Qué son los autovalores de una matriz? ¿Qué métodos conoces para determinarlos? ¿y para los autovectores? (No expliques en qué consisten)
38. ¿En qué consiste el método de la potencia? ¿Para qué sirve?
39. ¿En qué consiste el método de Jacobi? ¿Para qué sirve?
40. ¿Qué es la factorización QR? ¿Para qué sirve?
- 41.Cuál es la solución de la ecuación en diferencias finitas  $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$  donde  $y_0 = y_1 = 1$ .
42. Determina el término principal del error de truncado ( $y' = f + \text{T.E.T.}$ ) para el método de Euler explícito o hacia adelante. Haz lo mismo para el método de Euler implícito o hacia atrás.
43. Escribe la expresión general de un método de Runge-Kutta (explícito) de dos etapas. ¿Cuántos métodos de segundo orden existen con dos etapas? Justifica tu respuesta.

44. ¿Cuándo un método multipaso es incondicionalmente absolutamente estable? Escribe dos métodos multipaso que lo sean y su polinomio de estabilidad.
45. ¿Cuándo un método de Runge-Kutta (explícito) es fuertemente estable? Justifica tu respuesta.
46. Escribe un método de Adams explícito que no sea fuertemente estable.
47. Considera el método de Milne  $y_{n+1} = y_{n-1} + h/3 (f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$ . Calcula su polinomio característico. ¿Cuál es la raíz principal? ¿Cuántas raíces espurias tiene?
48. Estudia la consistencia del método de Milne  $y_{n+1} = y_{n-1} + h/3 (f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$  utilizando solamente su polinomio característico. ¿Cuál es su orden de consistencia?
49. Determina el término principal del error de truncado ( $y' = f + T.E.T.$ ) del método de Milne  $y_{n+1} = y_{n-1} + h/3 (f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$ . Escribe su raíz principal hasta orden  $O((h\lambda)^3)$ .
50. ¿Es consistente el método  $y_{n+1} = y_{n-1} + h/3 (2f_{n+1} + 8f_n + 2f_{n-1})$ ? ¿Es 0-estable (cumple la condición de la raíz)? ¿Es fuertemente estable?
51. Describe la fórmula compuesta del trapecio y calcula su error de integración.
52. Describe la fórmula compuesta de Simpson y calcula su error de integración.
53. Escribe una regla de integración cuyo error (de integración) sea proporcional a la quinta potencia de la longitud del intervalo.
54. Escribe una regla de integración que se base en aproximar el integrando por un polinomio de tercer orden basado en interpolación de Hermite. ¿Cómo hemos llamado a dicha regla de integración? ¿Cuál es su error de integración?
55. Estudia la consistencia del método en diferencias para  $y' = f$ ,  $y_{n+1} = y_n + ch(f_{n+1} - f_{n-2})$ .

56. ¿Puede ser convergente un método un método numérico fuertemente estable que sea inconsistente?
57. Las fórmulas gaussianas basadas en polinomios ortogonales de Chebyshev qué tipos de integrales permiten calcular. ¿Y las de Laguerre? ¿Y las de Hermite? ¿Y las de Legendre?
58. Sea una malla  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ , escribe la regla de integración compuesta del punto medio y su error de integración.
59. Si tengo la solución numérica del problema de contorno de una ecuación diferencial ordinaria no lineal con condiciones de contorno de Neumann, ¿puedo utilizar la regla integración compuesta del trapecio corregida? Si se puede, ¿cómo la utilizaría?
60. Cómo aplicaría la técnica de extrapolación al límite o de Richardson a un método Runge-Kutta cuyo error de truncado es  $Ch^2 + Dh^4$ . ¿Cuál es el orden del método resultante?
61. Considere un método numérico general con el siguiente error de truncado  $L(f) = L_h(f) + Ch^2 + Dh^4$ . Aplique extrapolación de Richardson para obtener un método de al menos quinto orden.
62. Escriba un método en diferencias finitas para el problema de contorno  $y'' = f(y)$ ,  $y(0) = y(1) = 1$ , que conduzca a una matriz pentadiagonal. ¿Cuál es su orden de precisión?
63. Considere una matriz definida positiva cuyo autovalor de mayor módulo es conocido. Describa dos procedimientos, relacionados con el método de la potencia, para calcular su autovalor de menor módulo.
64. Si se ha calculado el autovalor de mayor módulo de una matriz mediante el método de la potencia, ¿cómo se calcula un autovector al que corresponde?
65. Si  $A$  es una matriz hermítica, ¿cuál es la complejidad computacional de cada paso del método de la potencia inversa se calcula la matriz inversa de  $A$ ? ¿Y si se utiliza factorización  $LU$ ? Conteste ambas preguntas si la matriz  $A$  además es unitaria.

66. Sean los operadores en diferencias  $Ey_n = y_{n+1}$  y  $\Delta = E - 1$ , determine la expresión general del operador derivada  $Dy(x) = y'(x)$  en función de  $\Delta$ . Escriba la expresión de un método de orden 3 de precisión para calcular la derivada utilizando  $\Delta$  y desarrolle dicha expresión aplicada a  $y_n$ .
67. Sean los operadores en diferencias  $Ey_n = y_{n+1}$  y  $\nabla = 1 - E^{-1}$ , determine la expresión general del operador derivada  $Dy(x) = y'(x)$  en función de  $\nabla$ . Escriba la expresión de un método de orden 3 de precisión para calcular la derivada utilizando  $\nabla$  y desarrolle dicha expresión aplicada a  $y_n$ .
68. Calcule el desarrollo de Taylor de  $D(h) = (4/h^2)\text{arcsinh}^2(\delta/2)$  hasta orden  $O(\delta^5)$ . Nota:  $\delta$  corresponde a un operador en diferencias finitas centradas.
69. Calcule el desarrollo de Taylor  $r = a + b h \lambda + c (h \lambda)^2$  de las raíces del polinomio característico del método multipaso

$$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} + 2hf_{n-1}.$$

70. Describa la aplicación de un método de residuos promediados (o de Galerkin) basado en polinomios (globales) para un problema de contorno de la ecuación diferencial  $y'' = f(y)$  con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en  $[0, 1]$ .
71. Considere un método de elementos finitos basado en polinomios a trozos cúbicos continuos para la resolución de la ecuación  $-(a(x)y')' = f(x)$ , ¿cuál es la forma de la matriz de coeficientes del sistema lineal resultante? Justifique su respuesta. Ayuda: la matriz es tridiagonal, pentadiagonal, tridiagonal a bloques, etc.
72. Considere un método de elementos finitos basado en polinomios a trozos cúbicos continuos y con derivada continua para la resolución de la ecuación  $-(a(x)y')' = f(x)$ , ¿cuál es la forma de la matriz de coeficientes del sistema lineal resultante? Justifique su respuesta. Ayuda: la matriz es tridiagonal, pentadiagonal, tridiagonal a bloques, etc.
73. Considere un método de elementos finitos basado en polinomios a trozos cuadráticos continuos para la resolución de la ecuación  $-(a(x)y')' =$

$f(x)$ , ¿cuál es la forma de la matriz de coeficientes del sistema lineal resultante? Justifique su respuesta. Ayuda: la matriz es tridiagonal, pentadiagonal, tridiagonal a bloques, etc.

74. Dibuje (de forma aproximada) las funciones bases del espacio de polinomios a trozos cúbicos continuos y con derivada continua. ¿Cómo se desarrolla una función en dicho espacio?
75. Dibuje (de forma aproximada) las funciones bases del espacio de polinomios a trozos cuadráticos continuos. ¿Cómo se desarrolla una función en dicho espacio?
76. Considere la solución mediante un método de Galerkin (espectral) basado en polinomios trigonométricos en seno de una ecuación diferencial  $y'' = f$  con condiciones de contorno de Neumann homogéneas. ¿Cómo es la solución a dicho problema?
77. ¿Qué polinomio trigonométrico utilizaría para resolver una ecuación diferencial  $y'' = f(x)$  con condiciones de contorno Neumann no homogéneas? Justifique su respuesta.
78. Escriba la formulación variacional (débil) continua del problema de la ecuación biarmónica unidimensional  $u'''' = f(x)$ ,  $u(a) = u'(a) = 0$ ,  $u(b) = u'(b) = 1$ .
79. ¿Hay métodos predictor-corrector que necesitan un arranque? ¿Cuáles? ¿Cómo se debe realizar dicho arranque? ¿Se podría utilizar otro método predictor-corrector del mismo orden para el arranque? ¿Por qué?
80. Considere el problema de valores iniciales de la ecuación  $y'(x) = \cosh(x)$ . Estime el valor de  $\lambda$ , utilizado en el análisis de estabilidad de un método multipaso, para este problema. ¿Qué tipo de estabilidad estudiaría para garantizar la convergencia de un método multipaso consistente para  $h$  finito?
- 81.Cuál es el orden de convergencia del método numérico  $y^{n+1} = y^n + hf^n + h^2/2(f_x^n + f_y^n f_y^n)$  para resolver  $y' = f(x, y)$ . Calcule su polinomio de estabilidad. Estudie su estabilidad absoluta y relativa.

82. Determine el polinomio de estabilidad del método numérico predictor-corrector siguiente

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})).$$

¿Cuántas raíces espurias tiene?

83. Determine el polinomio de estabilidad del método de Runge-Kutta siguiente

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})),$$

¿Cuántas raíces espurias tiene?

84. Dados dos vectores  $x$  e  $y$ , bajo qué condiciones existe un vector  $v$  tal que  $(I - vv^*)x = y$ . ¿Cómo se llama este tipo de transformación?
85. Qué es una matriz de Hessenberg. ¿Toda matriz  $A$  se puede transformar en una matriz de Hessenberg mediante transformaciones de semejanza? En su caso, ¿cómo son éstas?
86. Si  $A$  es una matriz simétrica, ¿cómo es su forma canónica de Hessenberg? ¿Cómo puedo calcular los autovalores de ésta? Enuncie al menos tres métodos para el cálculo de sus autovalores.
87. Dada una matriz tridiagonal general, ¿cómo se calculan los coeficientes de su polinomio característico?
88. Enuncie el teorema de Gershgorin para la acotación de autovalores.