

RANA SALTARINA

Daniel Rivas Torres

danimlg@gmail.com

Alfredo Prieto Ruiz

artetelo@hotmail.com

Antonio Fernández Chamorro

maschamorro@hotmail.com

1. Funcionamiento del juego:

El juego se puede generalizar para n ranas. Para mostrar el funcionamiento vamos a jugar con 4 ranas, por lo tanto $n=4$. Dos ranas verdes y otras dos marrones.

Para comenzar necesitamos una charca con 5 piedras situadas una al lado de la otra, en la primera y segunda piedra se colocan las dos ranas verdes y en la cuarta y quinta piedra las ranas marrones, dejando la tercera piedra vacía, tal y como muestra en la viñeta 1. La finalidad del juego es pasar las ranas verdes al lado derecho y las marrones al izquierdo como muestra la viñeta 9.



INICIO



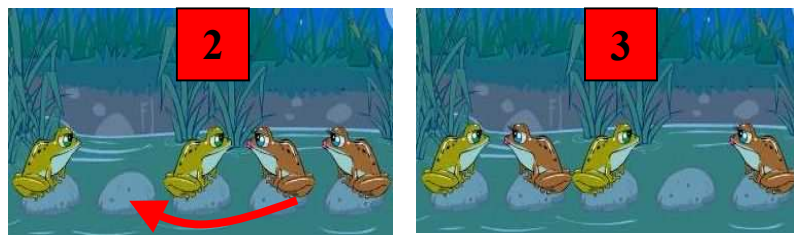
FINAL

¿Cómo podemos mover una rana y que movimientos están permitidos?

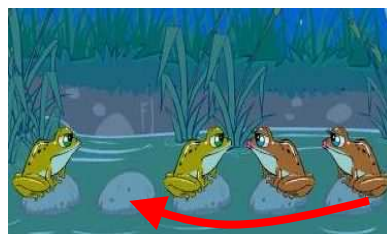
Las ranas pueden saltar a la piedra contigua siempre que dicha piedra esté vacía (ejemplo viñeta 1 y 2)



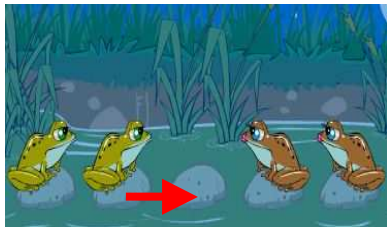
Pueden saltar sobre otra rana siempre y cuando caiga sobre una piedra vacía (ej. viñeta 2 y 3)



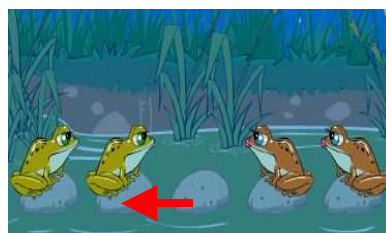
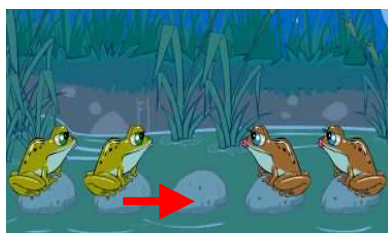
No está permitido saltar 2 ranas o más



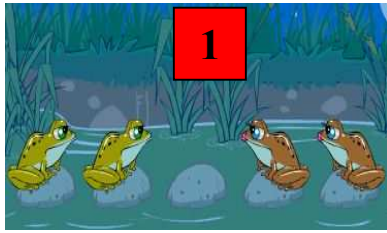
Empezamos moviendo la rana verde



Una rana puede volver a su piedra si ve que se ha equivocado



2. Solución gráfica para n=4:



Viñeta 1: Ranas en posición inicial posiciones de la 1 a la 5

Viñeta 2: Movemos rana verde posición 2 a posición 3 → S2 : d_(2,3)

Viñeta 3: Movemos rana roja posición 4 a posición 2 → S13 : s_(4,2)



Viñeta 4: Movemos rana roja posición 5 a posición 4 → S8 : d_(5,4)

Viñeta 5: Movemos rana verde posición 3 a posición 5 → S11 : s_(3,5)

Viñeta 6: Movemos rana verde posición 1 a posición 3 → S9 : s_(1,3)



Viñeta 7: Movemos rana roja posición 2 a posición 1 → S5 : d_(2,1)

Viñeta 8: Movemos rana roja posición 4 a posición 2 → S13 : s_(4,2)

Viñeta 9: Movemos rana verde posición 3 a posición 4 → S3 : d_(3,4)

Juego terminado.

3. Modelado del juego:

Empieza saltando la rana verde.

Las piedras están enumeradas del 1 a $n+1$

n = numero de ranas total

Los saltos posibles se registran con las variables $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{4n-2}$ formando un vector de salto:

Ejemplo $n=4$:

$$S = [S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7; S_8; S_9; S_{10}; S_{11}; S_{12}; S_{13}; S_{14}]$$

Generamos dos vectores de partida, el inicial y el final de tamaño $2*(n+1)$

Ejemplo $n=4$:

$$I = [0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0]$$
$$F = [1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1]$$

Construimos la tabla de posibles desplazamientos y saltos. En la que $d_{\{1,2\}}$ por ejemplo significa que la rana se desplaza desde la posición 1 a la 2, y $s_{\{3,5\}}$ significa que la rana salta desde la posición 3 a la 5. Ejemplo sacado de $n=4$:

Salto	Movimiento	Rana que se mueve
S1	$d_{\{1,2\}}$	Verde
S2	$d_{\{2,3\}}$	Verde
S3	$d_{\{3,4\}}$	Verde
S4	$d_{\{4,5\}}$	Verde
S5	$d_{\{2,1\}}$	Roja
S6	$d_{\{3,2\}}$	Roja
S7	$d_{\{4,3\}}$	Roja
S8	$d_{\{5,4\}}$	Roja
S9	$s_{\{1,3\}}$	Verde
S10	$s_{\{2,4\}}$	Verde
S11	$s_{\{3,5\}}$	Verde
S12	$s_{\{3,1\}}$	Roja
S13	$s_{\{4,2\}}$	Roja
S14	$s_{\{5,3\}}$	Roja

Tabla de desplazamientos

Construimos la matriz de desplazamientos, en la que las filas son las diferentes posiciones en las que puede estar una rana de un color, y las de otro, y las columnas son los distintos saltos que

puede realizar. La matriz se rellena con los datos de la tabla de movimientos poniendo un -1 en la casilla origen y un 1 en la casilla destino. Ejemplo matriz para $n=4$:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
R1					1							1		
R2					-1	1							1	
R3						-1	1					-1		1
R4							-1	1					-1	
R5								-1						-1
V1	-1								-1					
V2	1	-1								-1				
V3		1	-1						1		-1			
V4			1	-1						1				
V5				1							1			

Matriz desplazamientos

Ejemplo de modelado para $n=4$

OBJETIVO:

Debemos minimizar la suma de los posibles saltos.

$$S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 + S9 + S10 + S11 + S12 + S13 + S14$$

RESTRICCIONES

Sujeto a las restricciones que resultan de multiplicar la matriz por el vector de saltos ($S1...S14$) e igualarlo al vector formado por (vector final – vector inicial):

$$\begin{array}{lll}
 \text{ResR1: } S5 + S12 & = & 1 \\
 \text{ResR2: } -S5 + S6 + S13 & = & 1 \\
 \text{ResR3: } -S6 + S7 - S12 + S14 & = & 0 \\
 \text{ResR4: } -S7 + S8 - S13 & = & -1 \\
 \text{ResR5: } -S8 - S14 & = & -1 \\
 \text{ResV1: } -S1 - S9 & = & -1 \\
 \text{ResV2: } S1 - S2 - S10 & = & -1 \\
 \text{ResV3: } S2 - S3 + S9 - S11 & = & 0 \\
 \text{ResV4: } S3 - S4 + S10 & = & 1 \\
 \text{ResV5: } S4 + S11 & = & 1
 \end{array}$$

Acotamos el numero de veces que puede repetirse una variable a por ejemplo 20.

S1≤20
S2≤20
S3≤20
S4≤20
S5≤20
S6≤20
S7≤20
S8≤20
S9≤20
S10≤20
S11≤20
S12≤20
S13≤20
S14≤20

Sin olvidarnos de que para cualquier numero de ranas siempre empieza moviéndose la rana situada a la izquierda de la piedra central, por lo tanto obligatoriamente debe ser mayor que 1, también debemos tener en cuenta que los saltos de las ranas rojas – saltos ranas verdes = 0 para $(n/2)$ =valor par, y saltos rojas - saltos verdes = 1 para $(n/2)$ =valor impar.

S0: S2≥1

ST: $(S12+S13+S14)-(S9+S10+S11) = 0$

4. Modelo en formato LP para LP_Solve con n=4

Min: $S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 + S9 + S10 + S11 + S12 + S13 + S14$;

S0: $S2 \geq 1$;

ST: $+ S12 + S13 + S14 - S9 - S10 - S11 = 0$;

R1: $S5 + S12 = 1$;

R2: $- S5 + S6 + S13 = 1$;

R3: $- S6 + S7 - S12 + S14 = 0$;

R4: $- S7 + S8 - S13 = -1$;

R5: $- S8 - S14 = -1$;

V1: $- S1 - S9 = -1$;

V2: $S1 - S2 - S10 = -1$;

V3: $S2 - S3 + S9 - S11 = 0$;

V4: $S3 - S4 + S10 = 1$;

V5: $S4 + S11 = 1$;

$S1 \leq 20$;

$S2 \leq 20$;

$S3 \leq 20$;

$S4 \leq 20$;

$S5 \leq 20$;

$S6 \leq 20$;

$S7 \leq 20$;

$S8 \leq 20$;

$S9 \leq 20$;

$S10 \leq 20$;

$S11 \leq 20$;

$S12 \leq 20$;

$S13 \leq 20$;

$S14 \leq 20$;

int

$S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14$;

5. Modelo en formato LP para XpressMP con n=4

Minimize

$$S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 + S9 + S10 + S11 + S12 + S13 + S14$$

Subject To

$$S0: S2 \geq 1$$

$$R1: S5 + S12 = 1$$

$$R2: -S5 + S6 + S13 = 1$$

$$R3: -S6 + S7 - S12 + S14 = 0$$

$$R4: -S7 + S8 - S13 = -1$$

$$R5: -S8 - S14 = -1$$

$$V1: -S1 - S9 = -1$$

$$V2: S1 - S2 - S10 = -1$$

$$V3: S2 - S3 + S9 - S11 = 0$$

$$V4: S3 - S4 + S10 = 1$$

$$V5: S4 + S11 = 1$$

$$ST: +S12 + S13 + S14 - S9 - S10 - S11 = 0$$

Bounds

$$S1 \leq 20$$

$$S2 \leq 20$$

$$S3 \leq 20$$

$$S4 \leq 20$$

$$S5 \leq 20$$

$$S6 \leq 20$$

$$S7 \leq 20$$

$$S8 \leq 20$$

$$S9 \leq 20$$

$$S10 \leq 20$$

$$S11 \leq 20$$

$$S12 \leq 20$$

$$S13 \leq 20$$

$$S14 \leq 20$$

Integers

$$S1 \ S2 \ S3 \ S4 \ S5 \ S6 \ S7 \ S8 \ S9 \ S10 \ S11 \ S12 \ S13 \ S14$$

End

6. Modelo en formato MPS para XpressMP con n=4

NAME

ROWS

N R0

G S0

E ST

E R1

E R2

E R3

E R4

E R5

E V1

E V2

E V3

E V4

E V5

COLUMNS

MARK0000 'MARKER'

'INTORG'

S1 R0 1.0000000000 V1 -1.0000000000

S1 V2 1.0000000000

S2 R0 1.0000000000 S0 1.0000000000

S2 V2 -1.0000000000 V3 1.0000000000

S3 R0 1.0000000000 V3 -1.0000000000

S3 V4 1.0000000000

S4 R0 1.0000000000 V4 -1.0000000000

S4 V5 1.0000000000

S5 R0 1.0000000000 R1 1.0000000000

S5 R2 -1.0000000000

S6 R0 1.0000000000 R2 1.0000000000

S6 R3 -1.0000000000

S7 R0 1.0000000000 R3 1.0000000000

S7 R4 -1.0000000000

S8 R0 1.0000000000 R4 1.0000000000

S8 R5 -1.0000000000

S9 R0 1.0000000000 ST -1.0000000000

S9 V1 -1.0000000000 V3 1.0000000000

S10 R0 1.0000000000 ST -1.0000000000

S10 V2 -1.0000000000 V4 1.0000000000

S11 R0 1.0000000000 ST -1.0000000000

S11 V3 -1.0000000000 V5 1.0000000000

S12 R0 1.0000000000 ST 1.0000000000

S12 R1 1.0000000000 R3 -1.0000000000

S13 R0 1.0000000000 ST 1.0000000000

S13 R2 1.0000000000 R4 -1.0000000000

S14 R0 1.0000000000 ST 1.0000000000

S14 R3 1.0000000000 R5 -1.0000000000

MARK0001 'MARKER'

'INTEND'

```

RHS
  RHS    S0    1.0000000000  R1    1.0000000000
  RHS    R2    1.0000000000  R4    -1.0000000000
  RHS    R5    -1.0000000000  V1    -1.0000000000
  RHS    V2    -1.0000000000  V4    1.0000000000
  RHS    V5    1.0000000000
BOUNDS
UP BND    S1    20.0000000000
UP BND    S2    20.0000000000
UP BND    S3    20.0000000000
UP BND    S4    20.0000000000
UP BND    S5    20.0000000000
UP BND    S6    20.0000000000
UP BND    S7    20.0000000000
UP BND    S8    20.0000000000
UP BND    S9    20.0000000000
UP BND    S10   20.0000000000
UP BND    S11   20.0000000000
UP BND    S12   20.0000000000
UP BND    S13   20.0000000000
UP BND    S14   20.0000000000
ENDATA

```

7. Generador de ficheros .lp .mps

Hemos construido un programa en C++ que ofrece la posibilidad de crear los ficheros .lp para LP_Solve y el .lp y .mps para XPressMP. Para ello hay que introducirle el número total de ranas que queremos y elegir el correspondiente formato. El código de su funcionamiento queda reflejado en el fichero `generador.cpp`

8. Interpretación de soluciones

Una vez obtenidos los ficheros .lp procedemos a pasárselos al resolutor LP_Solve, el cual nos permite obtener con un simple clic el mismo modelo pero en formato .mps, o se lo pasamos al XPressMP. El resolutor una vez ejecutado nos ofrece las variables de la solución y el número de veces que se repite, en el caso que llevamos analizando desde el principio $n=4$ usando el resolutor XPressMP nos muestra la siguiente tabla de resultados:

Name	Solution	Reduced cost
S2	1	1e+030
S3	1	1e+030
S5	1	1e+030
S8	1	1e+030
S9	1	1e+030
S11	1	1e+030
S13	2	1e+030

De la que deducimos que las variables de la solución son S2,S3,S5,S8,S9,S11,S13 observando que S13 se repite dos veces. Estos valores están desordenados y no representan exactamente la secuencia de saltos correspondientes para resolver el problema, por lo que necesitamos un interpretador de soluciones.

El interpretador de soluciones que hemos creado sigue los siguientes pasos:

- 1.- Pide al usuario el numero de ranas del modelo.
- 2.- Pide al usuario el numero de variables obtenidas en el resolutor.
- 3.- Va pidiendo al usuario el índice de las variables de la solución.

Declaramos una matriz[numero soluciones][3] .

Para cada índice introducido mediante una función `decodificaX` y otra `decodificaY` , obtenemos los valores de la tabla de desplazamiento. Por ejemplo $n=4$:

S2 índice 2 valor $x=2$, valor $y=3$ $d_{(2,3)}$
S8 índice 8 valor $x=5$, valor $y=4$ $d_{(5,4)}$

Que vamos guardando en `matriz[][0]` la x , `matriz[][1]` la y , en `matriz[][2]` guardamos un 0, valor que nos servirá en el futuro para saber si un par ha sido seleccionado o no.

4.- Una vez rellena la matriz con todos los movimientos x,y de la solución. Comprobamos si en la matriz existe el valor $(n/2, (n/2)+1)$ que se corresponde con el primer movimiento obligatorio para cualquier valor de n. Si no existe, “solución incorrecta”. Si existe ponemos $m[i][2] = 1$ lo que nos indica que lo hemos visitado.

5.- Vamos llamando a una función recursiva que nos comprueba si existe un movimiento siguiente al actual en la matriz.

Si existe lo marca a 1, y hace la llamada recursiva.

Si no existe y están todos marcados a 1 hemos terminado “solución correcta”.

Si existe pero está marcado a 1 y hay alguno a 0 “solución incorrecta”.

Si tenemos por ejemplo el par (2,3), en la llamada recursiva busca el par que tenga como valor y=2

Como resultado el interpretador muestra la secuencia de movimientos que hay que seguir para resolver el problema y si corresponden con las variables introducidas al principio da como correcta la solución, sino la da como incorrecta.

9. Referencias bibliográficas:

Enlace para jugar con n=6, en esta versión no se puede deshacer un movimiento

<http://infantiles.juegorama.com/infantiles/ver-juego-1286.html>

Página de donde surge la idea de hacer este juego

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/65/matematicas_01.php

10. Agradecimientos:

Queremos dar las gracias al profesor Pablo Guerrero por todas las ideas, comentarios, rectificaciones y mejoras que nos ha ofrecido para poder terminar y modelar correctamente la rana saltarina. Sin su desinteresada ayuda este proyecto no se podría haber terminado a tiempo. Muchas Gracias.