	Fórmula válida	Fórmula no válida
estr. equitativa	ÉXITO	FRACASO NO TERMINACIÓN
estr. no equitativa	ÉXITO NO TERMINACIÓN	FRACASO NO TERMINACIÓN

Cuadro 1.9: Resultado del método de resolución.

estrategia concreta de resolución (que no siempre será equitativa). Además, a veces se sustituye la regla de resolución enunciada en las definiciones 1.40, 1.41 y 1.42 por otras variantes, como la *hiperresolución* o la *UR-resolución*. En esta subsección enunciaremos tres procedimientos para evitar la generación de cláusulas inútiles (subsunción, borrado con cláusulas unitarias y conflicto de cláusulas unitarias); también expondremos la estrategia de resolución del *conjunto de apoyo* o *sos*; por último, mencionaremos la regla de *hiperresolución*.

Definición 1.48 *(*Subsunción*). Sean dos cláusulas C, D. Se dice que D* subsume *C cuando existe una sustitución σ tal que $D\sigma \subseteq C$, o bien cuando C es una tautología.*

Por ejemplo, sean $C_1 = \mathsf{p(U)} \vee \neg\mathsf{p(U)}$, $C_2 = \mathsf{p(f(Y))} \vee \mathsf{q(a)}$, $C_3 = \mathsf{p(X)} \vee \mathsf{q(W)}$, $C_4 = \mathsf{p(Z)}$. C_1 es subsimida por todas las demás, ya que es una tautología. C_4 subsume C_2, pues sustituyendo en C_4 Z por $\mathsf{f(Y)}$ se obtiene $\mathsf{p(f(Y))}$, subconjunto de C_2. C_4 también subsume C_3, pues sustituyendo en C_4 Z por X se obtiene $\mathsf{p(X)}$, subconjunto de C_3. Por último, C_3 subsume C_2, ya que sustituyendo en C_3 X por $\mathsf{f(Y)}$ y W por a se obtiene la misma C_2.

Es obvio que si C_1 es identica a C_2, o es una instancia suya, entonces C_2 subsume C_1. También es obvio que la relación “C_2 subsume C_1” es reflexiva y transitiva. Sin embargo, no es antisimétrica, es decir, es posible que $C \neq D$, C subsuma D y D subsuma C. Por ejemplo, considérese el caso de $C = \mathsf{p(a)}$ y $D = \mathsf{p(X)} \vee \mathsf{p(a)}$.

Si dos cláusulas $C, D \in \Gamma$ (conjunto finito de cláusulas) y D subsume C, es claro que el conjunto $\Gamma - \{C\}$ equivale lógicamente a Γ.

Definición 1.49 *(*Reglas de subsunción*).*

Subsunción inicial: Sea $\mathtt{CLAUSULAS}_0$ *el conjunto inicial de cláusulas. Entonces, sustituirlo por el conjunto obtenido por el siguiente procedimiento: mientras exista $C \in \mathtt{CLAUSULAS}_0$ subsumida por $D \in \mathtt{CLAUSULAS}_0$, $C \neq D$, $\mathtt{CLAUSULAS}_0 \leftarrow \mathtt{CLAUSULAS}_0 - \{C\}$.*

Subsunción adelante: Sea R la resolvente obtenida y sea $D \in \mathtt{CLAUSULAS}$ tal que D subsume C. Entonces, no añadir R a CLAUSULAS.

Subsunción atrás: Sea R la resolvente obtenida y sea $C \in \mathtt{CLAUSULAS}$ tal que R subsume a C. Entonces, quitar C de CLAUSULAS *y añadir R a* CLAUSULAS.

Puede probarse la siguiente

Proposición 1.30 *Si es posible obtener una refutación de Γ empleando el método de resolución, entonces también es posible obtener una refutación aplicando el método de resolución a partir del resultado de aplicar la subsunción inicial a Γ, y aplicando subsunción adelante y/o atrás a cada resolvente calculada.*

Ejemplo 1.24 Consideremos el conjunto

(1) $\mathsf{p(X)}$
(2) $\neg\mathsf{q(a)}$
(3) $\neg\mathsf{p(X)} \vee \mathsf{q(X)}$
(4) $\mathsf{p(a)} \vee \mathsf{q(a)}$

Una refutación es

(5) $\mathsf{q(a)}$ de (3) y (4)
(6) $\Box$ de (2) y (5)

Pero si aplicamos la regla de subsunción al conjunto inicial y suprimimos (4) (que está subsumida por (1)) es igualmente posible obtener una refutación:

(4') $\mathsf{q(X)}$ de (3) y (1)
(5') $\Box$ de (2) y (4')

$\triangleleft$

Ejemplo 1.25 Veamos ahora un ejemplo que muestra el uso de la subsubción adelante. Sea el conjunto

(1) $\mathsf{p(X)} \vee \mathsf{q(X)}$
(2) $\mathsf{p(Y)} \vee \neg\mathsf{q(X)}$
(3) $\neg\mathsf{p(Z)} \vee \mathsf{q(Z)}$
(4) $\neg\mathsf{p(U)} \vee \neg\mathsf{q(U)}$

Empleando la estrategia de saturación y la regla de subsunción, el lector puede comprobar que se generan en la primera fase únicamente 4 clásulas:

(5) $\mathsf{p(A)}$
(6) $\mathsf{q(B)}$
(7) $\neg\mathsf{q(C)}$
(8) $\neg\mathsf{p(D)}$

y en la segunda y última

(9) $\Box$

$\triangleleft$

Ejercicio 1.45 Repetir el ejemplo anterior sin aplicar la regla de subsunción. ¿Cuántas cláusulas se generan? $\triangleleft$

Definición 1.50 *(Regla de* borrado con las cláusulas unitarias *o* Unit deletion*). Sea R la resolvente obtenida y sean $C_1, \ldots, C_n \in$ `CLAUSULAS` claúsulas unitarias resolubles con R. Entonces, resolver R con $C_1, \ldots, C_n$ obteniendo R', y hacer* `CLAUSULAS` $\leftarrow$ `CLAUSULAS` $\cup \{R'\}$.

Un caso particular de la anterior es la regla del *Unit conflict*:

Definición 1.51 *(Regla de* conflicto de clásulas unitarias *o* Unit conflict*). Sea R la resolvente obtenida, sea R unitaria y sea $C \in$ `CLAUSULAS` una claúsula unitaria resoluble con R. Entonces, resolver R con C obteniendo $\Box$, y acabar con EXITO.*

Ejemplo 1.26 Consideremos el conjunto inicial de cláusulas C_0 dado por

(1) $\mathsf{p(a)}$ (2)$\mathsf{q(a)}$ (3)$\neg\mathsf{p(X)} \vee \neg\mathsf{r(X)}$ (4) $\neg\mathsf{q(X)} \vee \mathsf{r(X)}$.

Si resolvemos, por ejemplo, (3) y (4), obtenemos la resolvente

(5)$\neg\mathsf{p(X)} \vee \neg\mathsf{q(X)}$

que se añadiría a C_0, obteniendo el conjunto $C_1 = C_0 \cup \{\neg \mathsf{p}(\mathsf{X}) \vee \neg \mathsf{q}(\mathsf{X})\}$. En dos pasos más podría añadirse la cláusula vacía. Pero si aplicamos la regla de borrado con las cláusulas unitarias, (5) se reduciría inmediatamente a (5') $\Box$, ya que las cláusulas unitarias (1) y (2) pueden "borrar" ambos literales de (5). Así que ahora $C_1 = C_0 \cup \{\Box\}$ y ya tenemos el éxito.

La regla de conflicto de cláusulas unitarias, sin embargo, no es aplicable al caso anterior, ya que la resolvente no es unitaria. En este otro caso sí lo es:

(1) $\mathsf{p}(\mathsf{a})$ (2)$\mathsf{q}(\mathsf{a})$ (3)$\neg \mathsf{p}(\mathsf{X}) \vee \neg \mathsf{r}(\mathsf{X})$ (4) $\mathsf{r}(\mathsf{X})$.

Si resolvemos (3) y (4), obtenemos la resolvente unitaria

(5)$\neg \mathsf{p}(\mathsf{X})$

que está en conflicto con la cláusula unitaria (1), así que en el mismo paso se acaba con éxito. ◁

Las anteriores reglas suponen perfeccionamientos aplicables en principio a cualquier estrategia de resolución. Pasemos ahora a describir una estrategia que supone una mejora sobre la estrategia pura de saturación: la estrategia del conjunto de apoyo (*set-of-support, sos*).

Definición 1.52 *(*Conjunto de apoyo *o* sos*). Consideremos una partición de* $\mathtt{CLAUSULAS}_0$ *en dos conjuntos no vacíos* $\mathtt{CLAUSULAS}_0^{usable}$ *y* $\mathtt{CLASULAS}_0^{sos}$ *tales que* $\mathtt{CLAUSULAS}_0^{usable}$ *es satisfacible.* $\mathtt{CLASULAS}_0^{sos}$ *se denomina conjunto de apoyo.*

La estrategia queda definida por el siguiente procedimiento:

Definición 1.53 *(*Estrategias sos*). En cada paso $i > 0$, realizar lo siguiente:*

1. *Seleccionar una cláusula* $C \in \mathtt{CLAUSULAS}_i^{usable}$*;*
2. $\mathtt{CLAUSULAS}_{i+1}^{usable} = \mathtt{CLAUSULAS}_i^{usable} \cup \{C\}$*;*
3. *Hallar el conjunto* $\mathtt{R}$ *de todas las resolventes de C con algún elemento de* $\mathtt{CLAUSULAS}_{i+1}^{usable}$*;*
4. $\mathtt{CLAUSULAS}_{i+1}^{sos} = (\mathtt{CLAUSULAS}_i^{sos} - \{C\}) \cup \mathtt{R}$*;*

Se puede demostrar que esta estrategia no afecta la completitud del método de resolución.

Ejemplo 1.27 Consideremos el argumento

$$\frac{\mathsf{p}(\mathsf{a}) \vee \neg \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{q}(\mathsf{a}), \forall \mathsf{X}(\neg \mathsf{q}(\mathsf{X}) \vee \mathsf{q}(\mathsf{f}(\mathsf{X})))}{\mathsf{p}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))}$$

Si suponemos —como es el caso normalmente— que el conjunto de premisas es satisfacible, entonces podemos tomar

$\mathtt{CLAUSULAS}_0^{usable} = \{\mathsf{p}(\mathsf{a}) \vee \neg \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{q}(\mathsf{a}), \forall \mathsf{X}(\neg \mathsf{q}(\mathsf{X}) \vee \mathsf{q}(\mathsf{f}(\mathsf{X})))\}$

$\mathtt{CLASULAS}_0^{sos} = \{\neg \mathsf{p}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\}$

Seleccionando la única cláusula del conjunto *sos* tendremos

$\mathtt{CLAUSULAS}_1^{usable} = \{\mathsf{p}(\mathsf{a}) \vee \neg \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{p}(\mathsf{b}), \mathsf{q}(\mathsf{a}), \forall \mathsf{X}(\neg \mathsf{q}(\mathsf{X}) \vee \mathsf{q}(\mathsf{f}(\mathsf{X}))), \neg \mathsf{p}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\}$

pero como no se genera ninguna resultante,

$\mathtt{CLASULAS}_1^{sos} = \varnothing$.

y el procedimiento acaba con FRACASO, ya que no es posible elegir ninguna cláusula del conjunto *sos*. Nótese que siguiendo una estrategia simple de saturación el método no habría terminado en este ejemplo. ◁

Hablando informalmente, podemos decir que siguiendo la estrategia sos no vamos a resolver entre sí las premisas a menos que tengan alguna "relación" con la conclusión, lo cual parece sensato. El demostrador OTTER sigue precisamente esta estrategia sos. Es claro que cuanto menor sea el conjunto *sos* inicial, más resoluciones inútiles podremos ahorrarnos.

Por último, pasemos a definir una regla que puede considerarse como una versión más potente de la resolución binaria: la *hiperresolución*, debida también a A. Robinson. Cuando usamos la hiperresolución, intentamos eliminar a la vez todos los literales negativos de una cláusula (llamada *núcleo*), resolviendo cada uno de ellos contra una cláusula diferente, formada por literales positivos, llamada *satélite*. En el caso de reglas definidas, el proceso es fácilmente visualizable como una aplicación del *modus ponens*. Por ejemplo, sea el argumento

$$\frac{(1)\mathsf{p(a)},(2)\mathsf{q(a,b)},(3)\neg\mathsf{p(X)}\vee\neg\mathsf{q(X,Y)}\vee\mathsf{q(Y,X)}}{(4)\mathsf{q(b,a)}}$$

Es claro que el argumento es válido. La regla de hiperrresolución permite justificarlo rápidamente, pues en un solo paso de (1), (2) y (3) se obtiene $(5)\mathsf{q(b,a)}$, que es la conclusión buscada.

En general, no se exige que el núcleo sea una cláusula de Horn, ni que los satélites sean unitarios. De esta forma llegamos a la definición general de *hiperresolvente*:

Definición 1.54 (Hiperresolvente.) *Sea una cláusula N cuyos literales negativos son $N_1,\ldots,N_k$. Llamaremos a N el* núcleo *de la hiperresolución. Sean k cláusulas positivas $S_1,\ldots,S_k$ tales que en cada una de ellas respectivamente existe un literal afirmado $A_1,\ldots,A_k$ unificable respectivamente con $N_1,\ldots,N_k$. Sea σ un u.m.g. de $N,A_1,\ldots,A_k$ tal que para todo i, $1\leq i\leq k$, sea $\neg A_i\sigma=N_i\sigma$. Entonces, un hiperresolvente de N con $S_1,\ldots,S_k$ es $(N\cup S_1\cup\ldots\cup S_k)\sigma-N_1\sigma-\ldots-N_k\sigma-A_1\sigma-\ldots-A_k\sigma$.*

Ejemplo 1.28 Sea el núcleo
$N=\neg\mathsf{p(X_1)}\vee\neg\mathsf{q(X_1,Y_1)}\vee\mathsf{r(Y_1,Y_1)}\vee\mathsf{s(X_1,Y_1)}$
y los satélites
$S_1=\mathsf{p(f(X_2)}\vee\mathsf{p(f(f(X_2)))}$,
$S_2=\mathsf{q(f(X_3),X_3)}\vee\mathsf{p(X_3)}$.
Aplicando el u.m.g $\{\mathsf{X_1/f(X_2),X_3/X_2,Y_1/X_2}\}$, un hiperresolvente es
$\mathsf{p(f(f(X_2)))}\vee\mathsf{p(X_2)}\vee\mathsf{r(X_2,X_2)}\vee\mathsf{s(f(X_2),X_2)}$
Existen otros; calcúlelos el lector como ejercicio. ◁

Se puede demostrar que la regla de hiperresolución es completa, es decir, que si existe una derivación de □ empleando resolución, también existe empleando únicamente hiperresolución.

Capítulo 2

TEORIAS CON IGUALDAD

"Creo que puedo aclarar la relación de mi "Begriffsschrift" [escritura de los conceptos] *con el lenguaje natural comparándola con la que tienen el microscopio y el ojo. El ojo es superior al microscopio por su versatilidad y el rango de sus posibles usos... Pero tan pronto como la Ciencia reclama mayor agudeza de resolución, el ojo resulta insuficiente."*

(Frege, "Begriffsschrift", 1878)

En los capítulos anteriores no se ha supuesto la presencia en nuestro lenguaje de ningún predicado concreto; en efecto, cada predicado aparece y tiene sentido en su correspondiente teoría propia, al simbolizar y formalizar conceptos y relaciones de una parte del mundo. Por ejemplo, el predicado que simboliza la relación *mayor que* no tendría mucho sentido si se aplicara a colores. Sin embargo, hay una relación que tiene sentido en cualquier dominio: la relación de *identidad*, que relaciona cada objeto consigo mismo, y con nada más. Para representar esta relación se introduce en el lenguaje de la lógica de primer orden el *predicado de igualdad*, que denotaremos en forma infija con el símbolo $=$. Puesto que esta relación es universalmente aplicable, su estudio se suele considerar parte de la lógica de primer orden, a diferencia de otras relaciones y funciones, cuya representación lógica se considera en el ámbito de sus respectivas teorías propias (teoría de conjuntos, teoría de grupos, etc.). A los lenguajes de primer orden que contienen dicho predicado como constante u operador lógico se les denomina *lenguajes del cálculo de predicados de primer orden con igualdad.* Estos lenguajes constituyen el tema de este capítulo.

Nótese que a partir de este momento emplearemos el mismo símbolo de la igualdad "=" tanto en el lenguaje formal como en el metalenguaje. En el primero, "=" será un predicado especial; en el segundo, una abreviatura de la expresión "ser idéntico a".

2.1. SINTAXIS.

Definición 2.1 *Un lenguaje del* $CP^{=}$ *es un lenguaje generado por una gramática que incorpora el predicado de igualdad = como operador lógico a la gramática de un lenguaje del* CP*.*

Llamaremos $CP^{=}(\Sigma)$ al lenguaje del $CP^{=}$ construido a partir del vocabulario Σ. En realidad, un lenguaje del $CP^{=}$ es un lenguaje del CP que contiene el predicado $=$, pero entendiéndolo como una constante lógica. Ahora bien, hay una variación respecto a la signatura, pues, en este caso, contrariamente a lo que estipulamos para los lenguajes del CP, el conjunto $Pred_\Sigma$ puede ser vacío. Como convenciones de notación, escribiremos $s = t$ en vez de $=(s,t)$. A veces, escribiremos $t_1 \neq t_2$ en lugar de $\neg t_1 = t_2$.

Ejemplo 2.1 Sea el siguiente discurso en lenguaje natural: *Pedro es el padre de Jaime. Jaime odia a todos los amigos de Marta menos a Raúl.* Emplearemos las constantes

pedro	*Pedro*
jaime	*Jaime*
raul	*Raúl*
marta	*Marta*

el símbolo de función

padre	*padre* (monario)

y los predicados

amigo	*ser amigo de* (binario)
odia	*odiar a* (binario)

Así que tenemos *Pedro es el padre de Jaime*:

$$\mathsf{pedro} = \mathsf{padre}(\mathsf{jaime})$$

y *Jaime odia a todos los amigos de Marta menos a Raúl*:

$$\forall \mathsf{X}\ (\mathsf{amigo}(\mathsf{X},\mathsf{marta}) \wedge \mathsf{X} \neq \mathsf{raul} \rightarrow \mathsf{odia}(\mathsf{jaime},\mathsf{X})) \ \triangleleft$$

2.2. SEMÁNTICA.

Definición 2.2 *Una E-interpretación* I *de un lenguaje* $CP^{=}(\Sigma)$ *es una interpretación que satisface las condiciones expuestas en la definición 1.9 y que cumple además lo siguiente:*

1. $I(=)$ *es una relación de equivalencia en* D.
2. *Para todos los elementos* $d_1,\ldots, d, d',\ldots, d_n \in D$ *y para todo funtor n-ario* $f \in Pred(\Gamma)$, *si* $d\, I(=)\, d'$ *entonces* $f(d_1,\ldots, d,\ldots, d_n)\, I(=)\ f(d_1,\ldots, d',\ldots, d_n)$.
3. *Para todos los elementos* $d_1,\ldots, d, d',\ldots, d_n \in D$ *y para todo predicado n-ario* $p \in Pred(\Gamma)$, *si* $d\, I(=)\, d'$ *y* $(d_1,\ldots,d,\ldots,d_n) \in I(p)$, *entonces* $(d_1,\ldots,d',\ldots,d_n) \in I(p)$.

En cualquier E-interpretación I con dominio D se tiene —como consecuencia de la relación de equivalencia establecida en D— una partición P de D. Los elementos de cada parte de la partición se consideran "iguales". Dichas partes son clases de equivalencia bajo $I(=)$. Mediante $[d]$ denotamos la clase de equivalencia bajo $I(=)$ de un elemento cualquiera $d \in D$, donde $[d] = \{d' | \ d' I(=) d\}$, así que $P = \{[d] | \ d \in D\}$.

Definición 2.3 *Una E-interpretación I con dominio D del $CP^=$ se llama* normal *si la interpretación de $=$ en I es la identidad en D; es decir, si $I(=) = \{(d,d) | \ d \in D\}$.*

Sea φ una fórmula del $CP^=$ y Γ una teoría del $CP^=$; entonces

Definición 2.4 *La clase de las E-interpretaciones de φ (o Γ) está formada por las interpretaciones de φ (o Γ) que cumplen las propiedades de la definición 2.2.*

En cuanto a la definición de satisfacción referida a E-interpretaciones, hemos de añadir una cláusula especial para tratar el predicado de igualdad. Tenemos, pues:

Definición 2.5 *Sean una E-interpretación I y una asignación $\mathfrak{a}$ sobre I. Se define $I \vDash_{\mathfrak{a}} \varphi$ (I satisface φ con $\mathfrak{a}$) como en la definición 1.10 pero además añadimos la cláusula*

$I \vDash_{\mathfrak{a}} s = t$ si y sólo si $(I_{\mathfrak{a}}(s), I_{\mathfrak{a}}(t)) \in I(=)$

(adviértase que $I(=)$ es una relación de equivalencia).

Además definimos "modelo normal":

Definición 2.6 *Una E-interpretación I es un* modelo normal *de φ (o Γ) si I es una E-interpretación normal y un modelo de φ (o Γ).*

En un modelo normal I tenemos, pues, que $I \vDash_{\mathfrak{a}} s = t$ si y sólo si $I_{\mathfrak{a}}(s) = I_{\mathfrak{a}}(t)$.

Por otro lado, las definiciones de "E-satisfacibilidad", "E-verdad" y "E-validez" son análogas a las nociones de de "satisfacibilidad", "verdad" y "validez" expuestas en la sección 1.2.

Ejemplo 2.2 Sea Γ_1 la teoría dada por los axiomas propios $\{\mathsf{a} = \mathsf{b}, \forall \mathsf{X}\ \mathsf{p}(\mathsf{X}), \exists \mathsf{X}\ \mathsf{q}(\mathsf{X})\}$. Vamos a enumerar todas sus E-interpretaciones de Herbrand. Sea I una interpretación de Herbrand de Γ_1. Las posibles particiones del dominio de I son:

-$\{\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}\}$. Ello significa que $\mathsf{a} = \mathsf{b}$. $I(\mathsf{p})$ puede ser $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ ó $\emptyset$; independientemente, $I(\mathsf{q})$ puede ser también $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ ó $\emptyset$. Por tanto tenemos 4 E-interpretaciones $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

-$\{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}\}$. Ello significa que $\mathsf{a} \neq \mathsf{b}$. Tanto $I(\mathsf{p})$ como $I(\mathsf{q})$ pueden ser $\{\mathsf{a}\}$, $\{\mathsf{b}\}$, $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ ó $\emptyset$; tenemos por tanto otras 16 E-interpretaciones $\{F_1, \ldots, F_{16}\}$.

De ellas serán E-modelos las que satisfagan los axiomas propios. Ello excluye a las $\{F_1, \ldots, F_{16}\}$ (que no satisfacen $\mathsf{a} = \mathsf{b}$). De las $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, la única que satisface $\forall \mathsf{X}\ \mathsf{p}(\mathsf{X})$ y $\exists \mathsf{X}\ \mathsf{q}(\mathsf{X})$ es la dada por $I(\mathsf{p}) = \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$, $I(\mathsf{q}) = \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ $\triangleleft$

Ejercicio 2.1 Sea el conjunto de axiomas $\Gamma = \{\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{b}), \neg\mathsf{p}(\mathsf{b},\mathsf{a}), \mathsf{a} = \mathsf{b}\}$

1. Encontrar todas sus posibles E-interpretaciones de Herbrand.
2. ¿Es Γ insatisfacible?
3. ¿Es Γ E-insatisfacible?

$\triangleleft$

2.3. AXIOMÁTICA.

El conjunto de axiomas y esquemas de axioma que se suele proponer para expresar formalmente el significado de la igualdad es el siguiente:

Definición 2.7 *Sistema* $\mathbf{KLC}^{=}$*. (Sistema de Kleene para el* $CP^{=}$*). Todas las instanciaciones-*$CP^{=}$ *de los esquemas de axioma del* **KLC** *así como sus reglas de inferencia y además el axioma*

11. $\forall\, \mathsf{X}\, \mathsf{X} = \mathsf{X}$ *(reflexividad)*

siendo X *la primera variable de una enumeración efectiva cualquiera de las variables del* $CP^{=}$*.*

Además, las instanciaciones-$CP^{=}$ *de los siguientes esquemas de axioma:*

12.

$$\forall Y \forall X_1 \ldots \forall X_i \ldots \forall X_n$$
$$(X_i = Y \rightarrow f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = f(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_n)$$

donde f *es cualquier funtor e* i *es cualquier posición (sustituibilidad en términos)*

13.

$$\forall Y \forall X_1 \ldots \forall X_i \ldots \forall X_n$$
$$(X_i = Y \wedge p(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) \rightarrow p(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_n))$$

donde p *es cualquier predicado e* i *es cualquier posición (sustituibilidad en predicados)*

El axioma y los esquemas anteriores pueden escribirse en forma clausal:

11'. $\mathsf{X} = \mathsf{X}$

12'. $\neg X_i = Y \vee f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = f(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_n)$

13'. $\neg X_i = Y \vee \neg p(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) \vee p(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_n)$

Llamaremos $\mathbf{KLC}^{=}(\Gamma)$ al conjunto de axiomas de la igualdad para el lenguaje $CP^{=}(\Sigma_\Gamma)$ o lenguaje generado por los símbolos de la teoría Γ tal y como se indicó en la sección 1.1.

Definición 2.8 *Se dice que* Γ *es una* teoría con igualdad *si tiene como axiomas propios al menos los axiomas del sistema* $\mathbf{KLC}^{=}(\Gamma)$*. Mediante* $Eq(\Gamma)$ *denotaremos al conjunto de axiomas propios de la igualdad de* Γ*.*

Por ejemplo, si Γ es la teoría del ejemplo 2.2, entonces $Eq(\Gamma)$ será el conjunto de axiomas

$$\{\forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y}\,((\mathsf{X} = \mathsf{Y} \wedge \mathsf{p}(\mathsf{X})) \rightarrow \mathsf{p}(\mathsf{Y})), \forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y}\,((\mathsf{X} = \mathsf{Y} \wedge \mathsf{q}(\mathsf{X})) \rightarrow \mathsf{q}(\mathsf{Y}))\}$$

y si además tuviéramos un funtor binario f habría que añadir

$$\{\forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y} \forall \mathsf{Z}\,(\mathsf{X} = \mathsf{Y} \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{X},\mathsf{Z}) = \mathsf{f}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})),$$
$$\forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y} \forall \mathsf{Z}\,(\mathsf{X} = \mathsf{Y} \rightarrow \mathsf{f}(\mathsf{Z},\mathsf{X}) = \mathsf{f}(\mathsf{Z},\mathsf{Y}))\}$$

Ejercicio 2.2 Una relación $\leq$ en un conjunto se dice de *orden parcial* cuando cumple: i) Todo elemento está relacionado consigo mismo mediante $\leq$; ii) Si para una pareja de elementos x, y se da a la vez $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces x e y son iguales; iii) La relación $\leq$ es transitiva.

Expresar formalmente en una teoría de primer orden la definición de relación de orden parcial. $\triangleleft$

Proposición 2.1 *Todas las instanciaciones-$CP^=$ de los siguientes esquemas son teoremas de* $\mathbf{KLC}^=$*:*

1. *Reflexividad de términos cualesquiera:*
   $t = t$ *(para cualquier término t)*
2. *Simetría de la igualdad:*
   $\forall X \forall Y (X = Y \rightarrow Y = X)$
3. *Transitividad de la igualdad:*
   $\forall X \forall Y \forall Z (X = Y \wedge Y = Z \rightarrow X = Z)$
4. *Sustituibilidad en fórmulas cualesquiera:*
   $\forall X \forall Y (X = Y \wedge \varphi \rightarrow \varphi[X/Y]^*)$
   y análogamente para $\varphi[X/Y]$ y $\varphi[X/Y]^+$.

El uso de $\varphi[X/Y]^*$, $\varphi[X/Y]^+$ y $\varphi[X/Y]$ es similar al efectuado en los capítulos anteriores, siendo A y B fórmulas cualesquiera.

Ejercicio 2.3 Demostrar la proposición 2.1. Pista para el apartado 4): emplear inducción sobre la longitud de la fórmula. $\triangleleft$

Ejercicio 2.4 Demostrar que todas las instancias de los siguientes esquemas de fórmula son teoremas de $\mathbf{KLC}^=$:

1. $\forall X(\varphi \leftrightarrow \exists Y(X = Y \wedge \varphi[X/Y])$ (si Y no aparece en φ)
2. $\forall X(\varphi \leftrightarrow \forall Y(X = Y \rightarrow \varphi[X/Y])$ (si Y no aparece en φ)
3. $\forall X \exists Y\, X = Y$

$\triangleleft$

Nótese que no hemos introducido nuevas reglas de inferencia, tan sólo nuevos axiomas; por tanto, el teorema de deducción vale para el $\mathbf{KLC}^=$ con las mismas restricciones de aplicación impuestas en la sección 1.2.5 a $\mathbf{KLC}$.

2.4. SATISFACIBILIDAD.

Sea Γ una teoría cualquiera del $CP^=$. Establecemos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.2 *Todos los miembros de $Eq(\Gamma)$ son E-válidos.*

DEMOSTRACIÓN: Se deja como ejercicio. $\triangleleft$

Proposición 2.3 *Sea Γ una teoría con igualdad satisfacible. Sea I una interpretación cualquiera que satisface Γ. Entonces, $I(=)$ es una relación de equivalencia e I es una E-interpretación.*

DEMOSTRACIÓN: Hay que demostrar que $I(=)$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Probemos, por ejemplo, la simetría. Supongamos que $I(=)$ no fuera simétrica. Entonces existirían dos elementos $d, d' \in D$ de I tales que $(d, d') \in I(=)$ y $(d', d) \notin I(=)$. Por la proposición 2.1 sabemos que cualquier fórmula que sea una instanciación de un esquema como $\forall X \forall Y(X = Y \rightarrow Y = X)$ es un teorema del $\mathbf{KLC}^=(\Gamma)$, y por tanto verdadera en el modelo I. Pero considerando la asignación $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a}(X) = d$, $\mathfrak{a}(Y) = d'$, concluimos que la fórmula es falsa en I. Luego no existen tales elementos d, d'. $\triangleleft$

Proposición 2.4 *Sea Γ una teoría de primer orden. Γ es E-insatisfacible si y sólo si $\Gamma \cup Eq(\Gamma)$ es una teoría insatisfacible.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\Gamma \cup Eq(\Gamma)$ es una teoría insatisfacible, entonces —dado que los miembros de $Eq(\Gamma)$ son E-válidos (proposición 2.2)— es fácil ver que Γ es E-insatisfacible. Para la parte “sólo si” procederemos por contraposición. Supongamos que $\Gamma \cup Eq(\Gamma)$ es satisfacible. En ese caso hay una interpretación I de dicha teoría que la satisface. Luego I satisface Γ. Además, I es una E-interpretación porque satisface $Eq(\Gamma)$ y, por la proposición anterior, esto garantiza que $I(=)$ sea una relación de equivalencia en el dominio de I. Así pues, Γ es E-satisfacible. $\triangleleft$

Proposición 2.5 *Si Γ es una teoría con igualdad satisfacible, entonces es satisfacible en una interpretación en la que $=$ se interpreta como la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Si Γ es satisfacible, existe al menos una interpretación I y una asignación $\mathfrak{a}$ sobre I tales que I satisface Γ con $\mathfrak{a}$. Sea D el dominio de I. Definamos una nueva interpretación I^* y probemos que satisface igualmente Γ. El dominio de I^* será la partición D^* de D determinada por la relación de equivalencia E correspondiente a la interpretación de $=$ en I. Es decir, el dominio de I^* es el conjunto cociente D/E, o sea, $D/I(=)$. La interpretación de $=$ en I^* será la identidad entre las clases de equivalencia; en otras palabras, tenemos $(d, d') \in I(=)$ si y sólo si $([d], [d']) \in I^*(=)$, o lo que es igual, dEd' si y sólo si $[d] = [d']$.

Ahora definimos:

i) para cada constante $c \in Con(\Gamma)$, $I^*(c) = [I(c)]$;
ii) para cada funtor n-ario $f \in Fun(\Gamma)$,

$I^*(f)([d_1],\ldots,[d_n]) = [I(f)(d_1,\ldots,d_n)]$, para cada tupla $([d_1],\ldots,[d_n]) \in D^*$;

iii) para cada predicado n-ario $p \in Pred(\Gamma)$,
$I^*(p) = \{([d_1],\ldots,[d_n]) | \ (d_1,\ldots,d_n) \in I(p)\}$.

Es fácil comprobar que esta definición no es contradictoria y que, si en I se satisfacían todos los axiomas propios de Γ, también se satisfarán en I^*. Así que $I*$ es una E-interpretación normal. Ahora, definamos una asignación $\mathfrak{a}^*$ sobre I^* como sigue: $\mathfrak{a}^*(X) = [\mathfrak{a}(X)]$. Teniendo en cuenta, además, la definición 1.9, tenemos finalmente:

i) $I^*_{\mathfrak{a}^*}(t) = [I_{\mathfrak{a}}(t)]$;
ii) $I \vDash_{\mathfrak{a}} \varphi$ si y sólo si $I^* \vDash_{\mathfrak{a}^*} \varphi$

Probemos i). Procederemos inductivamente: si t es una constante o una variable tenemos claramente $I^*_{\mathfrak{a}^*}(t) = [I_{\mathfrak{a}}(t)]$. Si t es un término de la forma $f(t_1,\ldots,t_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
I^*_{\mathfrak{a}^*}(t) &= I^*_{\mathfrak{a}^*}(f(t_1,\ldots,t_n)) \\
&= I^*(f)(I^*_{\mathfrak{a}^*}(t_1),\ldots,I^*_{\mathfrak{a}^*}(t_n)) \\
&= I^*(f)([I_{\mathfrak{a}}(t_1)],\ldots,[I_{\mathfrak{a}}(t_n)]) \\
&= [I(f)(t_1,\ldots,t_n)] \\
&= [I_{\mathfrak{a}}(t)]
\end{aligned}$$

La demostración de ii) es igualmente inductiva y queda como ejercicio (en el paso base considérese —aparte del caso general— el caso específico $s = t$). ◁

La proposición siguiente nos muestra que es imposible caracterizar por completo el concepto de identidad.

Proposición 2.6 *Si Γ es una teoría con igualdad satisfacible, entonces es satisfacible en una interpretación en la que $=$ no se interpreta como la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos un modelo I de Γ con dominio D en el que $=$ se interpreta como la identidad en D. Construyamos otro modelo I^* en el que $=$ no se interpreta como la identidad. Sea e un elemento cualquiera tal que $e \notin D$ y sea $D' = D \cup \{e\}$. Sea d un elemento cualquiera de D. Definimos I^* como sigue: $(e,d) \in I^*(=)$; para cualquier predicado n-ario p, $I(p) \subseteq I^*(p)$; además, si $(d_1,\ldots,d,\ldots,d_n) \in I(p)$, entonces $(d_1,\ldots,e,\ldots,d_n) \in I^*(p)$. Es fácil probar que I^* es un modelo de Γ, suponiendo que lo sea I. ◁

El lector puede preguntarse si en la realidad existen elementos "distintos" tales que sean indiscernibles según todos los predicados imaginables, como se supone en la construcción que aparece en la prueba anterior. Pero esta cuestión, claramente metafísica, sale fuera del marco de la lógica.

De las proposiciones anteriores se desprende fácilmente lo siguiente:

Teorema 2.1 *Toda teoría con igualdad que tiene un modelo, tiene al menos un modelo normal y al menos un modelo no normal.*

Ejercicio 2.5 Sean los conjuntos de axiomas

$\Gamma_1 = \{\mathsf{X} = \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{X})), \mathsf{p}(\mathsf{X}) \vee \mathsf{q}(\mathsf{X}), \neg\mathsf{q}(\mathsf{a})\}$ y
$\Gamma_2 = \{\neg\mathsf{p}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{Y})) \vee \neg\mathsf{q}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{Z}))), \mathsf{q}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))))\}$.

Se pregunta:

1. ¿Cuántos modelos de Herbrand tiene $\Gamma_1 \cup Eq(\Gamma_1)$?

2. ¿Cuántos modelos de Herbrand tiene $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup Eq(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$?

$\triangleleft$

2.5. CORRECCIÓN Y COMPLETITUD.

Probaremos la corrección y completitud de $\mathbf{KLC}^=$ teniendo en cuenta solamente interpretaciones normales. La prueba de corrección (fuerte y débil) sigue los pasos trazados en la sección 1.3.4 para **KLC**, pero teniendo en cuenta la proposición 2.2. Tenemos, por tanto

Teorema 2.2 *(Corrección de $\mathbf{KLC}^=$).*

1. *Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi$*

2. *Si $\vdash \varphi$, entonces $\vDash \varphi$*

Nótese que ahora empleamos los símbolos $\vdash$ y $\vDash$ con el sentido apropiado a las teorías con igualdad; es decir, $\Gamma \vdash \varphi$ se leerá "φ se deriva axiomáticamente de los axiomas de $\Gamma \cup Eq(\Gamma)$ ", o sea, lo mismo que $\Gamma \vdash_{\mathbf{KLC}^=(\Gamma)} \varphi$. Por su parte, $\Gamma \vDash \varphi$ se leerá "φ es verdadera en todos los modelos normales de Γ."

Asimismo, la prueba de completitud sigue igualmente los mismos pasos que la desarrollada en la sección 1.3.4 (1^a forma). Sin embargo, hay una diferencia importante en el modo de probar el lema de Henkin. Ahora no podemos construir una interpretación sintáctica en la que consideremos como objetos del dominio de cuantificación los términos del lenguaje y una asignación que asocie cada término del lenguaje consigo mismo (como objeto). Pues, si en un conjunto máximamente consistente y ejemplificado tenemos dos términos distintos, s y t, y la fórmula $s = t$, podríamos incurrir en una contradicción con semejante asignación si interpretamos $=$ como la identidad.

Lema 2.1 *Si Γ es un conjunto máximamente $\mathbf{KLC}^{=C}$-consistente y ejemplificado, entonces Γ es E-satisfacible en una interpretación normal sobre un dominio numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Si Γ es un conjunto máximamente $\mathbf{KLC}^{=C}$-consistente y ejemplificado, es una teoría de primer orden con igualdad, que —procediendo como en el lema 1.4— se demuestra que es satisfacible sobre un dominio infinito numerable, compuesto por los términos del $CP^{=C}$. En este caso, no interpretamos $=$ como la identidad sino como una relación de equivalencia, que es lo único a lo que nos fuerzan los axiomas de la igualdad. Pero, por la proposición 2.5, Γ es igualmente satisfacible en una E-interpretación normal. Es fácil comprobar que dicha E-interpretación es numerable al ser numerable el conjunto de términos del lenguaje. $\triangleleft$

Para la prueba del lema 2.1 hemos aprovechado el resultado de la proposición 2.5. Esta proposición tiene un carácter general, pues no especifica la naturaleza del dominio usado ni el tipo de relación de equivalencia definida. Una manera más concreta de proceder es la siguiente: se define una relación E tal que para términos cualesquiera s, t del $CP^{=C}$ se tiene sEt si y sólo si $s = t \in \Gamma$. Es fácil probar que la relación E, así definida, cumple las siguientes condiciones:

i) E es una relación de equivalencia en el conjunto de términos del $CP^{=C}$.

ii) Si $s_i E t_i$ (para $1 \leq i \leq n$), entonces se verifica

a) para cada funtor n-ario f del $CP^{=C}$,
$f(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) E f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$, y

b) para cada predicado n-ario p del del $CP^{=C}$,
$p(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \in \Gamma$ si y sólo si $p(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n) \in \Gamma$

La relación E provoca una partición del conjunto de términos del $CP^{=C}$ en E-clases de equivalencia. Sea T el conjunto de todos los términos del $CP^{=C}$. Definamos ahora una E-interpretación I del $CP^{=C}$ con un dominio D tal que:

- D es el conjunto cociente de T bajo E. Nótese que este dominio es numerable, pero no necesariamente infinito.
- Para cada constante c del $CP^{=C}$, $I(c) = [c]$
- Para cada símbolo de función n-ario f del $CP^{=C}$ y términos $t_1, \ldots, t_n$ del $CP^{=C}$, $I(f)([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$
- Para cada símbolo de predicado n-ario p del $CP^{=C}$,
$I(p) = \{([t_1], \ldots, [t_n]) |\ p(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma\}$.

Es fácil comprobar que la interpretación así definida es una E-interpretación. Más aún, es normal, ya que la interpretación de $=$ en I es la identidad en D. Tenemos, entonces, que sEt si y sólo si $[s] = [t]$. Por otro lado, las interpretaciones de los funtores y predicados se justifican gracias a la condición ii) de la definición de E, partes a) y b) respectivamente; que prueban que las definiciones no dependen de los representantes elegidos $t_1, \ldots, t_n$ para las respectivas clases $[t_1], \ldots, [t_n]$. Sea, además, $\mathfrak{a}$ una asignación que asigna a cada variable su clase de equivalencia, i.e. $\mathfrak{a}(X) = [X]$, para toda variable X del $CP^{=C}$. Entonces se cumple lo siguiente:

P1. Para todo término t del $CP^{=C}$, $I_{\mathfrak{a}}(t) = [t]$

P2. Para toda fórmula φ del $CP^{=C}$, $I \models_{\mathfrak{a}} \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma$.

Teorema 2.3 *Todo conjunto* **KLC**$^=$*-consistente es satisfacible sobre un dominio numerable.*

Teorema 2.4 *(Completitud de* **KLC**$^=$*).*

1. *Si* $\Gamma \models \varphi$*, entonces* $\Gamma \vdash \varphi$*.*
2. *Si* $\models \varphi$*, entonces* $\vdash \varphi$*.*

2.6. IGUALDAD Y LENGUAJE NATURAL.

La idea de identidad aparece expresada de varias formas en el lenguaje natural. La más simple, y quizás la más frecuente, es el empleo del verbo *ser* o sus análogos. Consideremos por ejemplo el enunciado *el uno es el sucesor del cero.* Si emplemos el funtor sucesor y las constantes cero y uno tendremos la fórmula

$\mathsf{uno} = \mathsf{sucesor(cero)}$. Pero no siempre el verbo *ser* expresa la idea de identidad; recuérdese lo visto en la sección 1.3. Enunciados como *Juan es gordo* o *Mari es una alumna* expresan simplemente una propiedad del sujeto.

También aparece la idea de identidad —esta vez implícitamente— al expresar la unicidad o multiplicidad de los objetos que satisfacen una condición, como al decir *A lo sumo un alumno es aplicado* o *Había menos de diez justos en Sodoma.* Desarrollaremos esta cuestión en la siguiente subsección.

Por otra parte, como ya señalamos en la sección 1.3, el uso de funtores fuera de las teorías matemáticas no es siempre recomendable. Las expresiones complejas del lenguaje natural que se refieren a un cierto objeto —llamadas "descripciones definidas"— merecen una consideración detallada; a ello dedicamos la subsección segunda.

2.6.1. EXISTENCIA, UNICIDAD Y MULTIPLICIDAD.

En ocasiones sabemos que existe a lo sumo un objeto que cumple determinada propiedad. Por ejemplo, podemos decir *Hay a lo sumo una válvula abierta.* La simbolización del conocimiento de este tipo exige el uso del predicado de igualdad. En efecto, una paráfrasis del enunciado anterior sería *Si una válvula X está abierta y una válvula Y está abierta, entonces las dos válvulas son iguales*, o sea

$$\forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y}(\mathsf{abierto(X)} \wedge \mathsf{abierto(Y)} \rightarrow \mathsf{X} = \mathsf{Y})$$

que se puede reformular equivalentemente como

$$\forall \mathsf{X} \forall \mathsf{Y}(\mathsf{abierto(X)} \wedge \neg \mathsf{X} = \mathsf{Y} \rightarrow \neg \mathsf{abierto(Y)})$$

En lo que sigue, se entenderá siempre que en una expresión como $A(X)$ la variable X está libre en A.

En general, *Hay a lo sumo un objeto que tenga la propiedad A* se simbolizará como

$$\forall X \forall Y (A(X) \wedge A(Y) \rightarrow X = Y)$$

Generalizando lo anterior, podemos simbolizar el enunciado *Hay a lo sumo n objetos que tengan la propiedad A* como

$$\begin{aligned} \forall X_1 \forall X_2 \ldots \forall X_{n+1}(\quad & (A(X_1) \wedge A(X_2) \wedge \ldots \wedge A(X_{n+1})) \\ & \rightarrow (X_{n+1} = X_1 \vee X_{n+1} = X_2 \vee \ldots \vee X_{n+1} = X_n)) \end{aligned}$$

La fórmula $\exists X \ A(X)$ se emplea, como sabemos, para simbolizar que existe al menos un objeto que cumple la propiedad A. Si queremos expresar que existen al menos dos objetos que cumplen A habremos de escribir

$$\exists X \exists Y (A(X) \wedge A(Y) \wedge X \neq Y)$$

y, en general, para expresar que al menos n objetos satisfacen A tendremos

$$\begin{aligned} \exists X_1 \exists X_2 \ldots \exists X_n(\quad & A(X_1) \wedge A(X_2) \wedge \ldots \wedge A(X_n) \\ & \wedge \neg X_1 = X_2 \wedge \ldots \wedge \neg X_1 = X_n \wedge \ldots \wedge \neg X_{n-1} = X_n) \end{aligned}$$

En otras ocasiones sabemos que existe un objeto, y sólo uno, que cumple determinada propiedad. Por ejemplo, podemos decir *Hay exactamente una válvula abierta*. La paráfrasis sería *Hay al menos una válvula abierta, y hay a lo sumo* *una válvula abierta*. En general, la simbolización de *Hay exactamente un objeto tal que A* será la conjunción de las dos ya vistas, es decir,

$$\exists X A(X) \wedge \forall X \forall Y (A(X) \wedge A(Y) \rightarrow X = Y)$$

o equivalentemente

$$\exists X (A(X) \wedge \forall Y (A(Y) \rightarrow X = Y))$$

o también

$$\exists X \forall Y (A(Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Se suele emplear un símbolo especial como abreviatura de la existencia única:

$\exists ! X\ A(X)$ que equivale por definición a $\exists X \forall Y (A(Y) \leftrightarrow X = Y)$

que se lee como *existe un único X tal que A(X)*. Lo anterior se simplifica notablemente si tenemos un nombre propio para este objeto. Por ejemplo, *La única válvula abierta es la válvula 1* se simboliza como

$$\mathsf{abierto(v1)} \wedge \forall \mathsf{X}(\mathsf{abierto(X)} \rightarrow \mathsf{X} = \mathsf{v1})$$

y, en general, *El único objeto que satisface A es c* será

$$A(c) \wedge \forall X (A(X) \rightarrow X = c)$$

Si queremos simbolizar que hay exactamente n objetos tales que cumplen A, habremos de escribir

$$\begin{array}{ll} \exists X_1 \exists X_2 \ldots \exists X_n (& A(X_1) \wedge A(X_2) \wedge \ldots \wedge A(X_n) \\ & \wedge \neg X_1 = X_2 \wedge \ldots \wedge \neg X_1 = X_n \wedge \ldots \wedge \neg X_{n-1} = X_n \\ & \wedge \forall Y (A(Y) \rightarrow (Y = X_1 \vee \ldots \vee Y = X_n))) \end{array}$$

y si sabemos los nombres de estos n objetos, por ejemplo $\mathsf{c_1}, \ldots, \mathsf{c_n}$, será

$$\begin{array}{l} (A(c_1) \wedge A(c_2) \wedge \ldots \wedge A(c_n) \\ \wedge \neg c_1 = c_2 \wedge \ldots \wedge \neg c_1 = c_n \wedge \ldots \wedge \neg c_{n-1} = c_n \\ \wedge \forall Y (A(Y) \rightarrow (Y = c_1 \vee \ldots \vee Y = c_n)) \end{array}$$

Ejercicio 2.6 Probar los teoremas enunciados más arriba:

1. $\exists X\ A(X) \wedge \forall X \forall Y (A(X) \wedge A(Y) \rightarrow X = Y) \leftrightarrow \exists X (A(X) \wedge \forall Y (A(Y) \leftrightarrow X = Y))$

2. $\exists X (A(X) \wedge \forall Y (A(Y) \rightarrow X = Y)) \leftrightarrow \exists X \forall Y (A(Y) \leftrightarrow X = Y)$

3. $A(c) \wedge \forall X (A(X) \rightarrow X = c) \leftrightarrow \exists Y (A(Y) \wedge \forall X (A(X) \rightarrow X = c)$

◁

Ejercicio 2.7 Supongamos el siguiente discurso:

En esta casa viven únicamente dos personas, Mari y Pepi. Exactamente un habitante es trapecista. A lo sumo un habitante es vigilante de la playa. Al menos un habitante es de cabellos rubios. Mari no es rubia ni trapecista. Luego Pepi es trapecista y de cabellos rubios.

Simbolizarlo en un lenguaje con igualdad. ◁

Proposición 2.7 *Los siguientes esquemas son teoremas en cualquier teoría con igualdad:*

1. $\forall X \exists ! Y\ X = Y$

2. $\forall X(\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \leftrightarrow (\exists ! X \varphi(X) \leftrightarrow\ \exists ! X \psi(X))$

3. $\exists ! X(\varphi(X) \vee \psi(X)) \leftrightarrow (\exists ! X \varphi(X) \vee \exists ! X \psi(X))$

4. $\neg \exists ! X \varphi(X) \leftrightarrow (\forall X \neg \varphi(X) \vee \exists Y \exists Z(\neg Z = Y \wedge \varphi(Y) \wedge \varphi(Z))$

Ejercicio 2.8 . Probar los teoremas de la proposición 2.7.
Pista: por el teorema de completitud, basta probar que son E-válidos. $\triangleleft$

2.6.2. DESCRIPCIONES DEFINIDAS.

Una descripción definida es una frase del lenguaje natural que identifica un objeto concreto del mundo mencionando alguna propiedad que lo caracteriza y distingue de los demás objetos. Típicamente, las descripciones definidas constan del artículo definido singular (*el/la*) seguido de una propiedad. Por ejemplo, *el autor de "Programación en Java 17.0"*, *la mujer más gorda del mundo*. Las referencias anafóricas y deícticas suelen emplearse también para construir descripciones definidas. Por ejemplo, *su novio* significa *el novio de ella*; o *esta silla* equivale a *el objeto que está junto al hablante y es una silla*. Para simbolizar las descripciones definidas, modificamos el lenguaje del $CP^=$ en lo que se refiere a la formación de términos. Concretamente, añadimos una nueva producción para generarlas y —para simplificar la exposición— suprimimos la producción que genera términos funtoriales.

Definición 2.9 *Un lenguaje del* $CP^=_d$ *es cualquier lenguaje que se obtenga añadiendo a la gramática de los lenguajes del* $CP^=$ *el símbolo* ι *y sustituyendo las reglas de formación de términos por las de la tabla 2.1.*

$Termino \Rightarrow$	$Variable \mid Constante$
$Termino \Rightarrow$	$\iota(Variable)\ S$

Cuadro 2.1: Sintaxis del $CP^=_d$

El término $\iota(X)\ S$ se lee *el X tal que S*. De esta forma, la descripción *el autor de "Programación en Java 17.0"* se simboliza como $\iota(\mathsf{X})\mathsf{autor}(\mathsf{X}, \mathsf{pj17})$, y *la mujer más gorda del mundo* como $\iota(\mathsf{X})(\mathsf{mujer}(\mathsf{X}) \wedge \forall \mathsf{Y}(\mathsf{mujer}(\mathsf{Y}) \rightarrow \mathsf{masgorda}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})))$. Como vemos en estos ejemplos, la fórmula S puede ser tan simple o tan compleja como se desee. En particular, la sintaxis dada para el lenguaje $CP^=_d$ permite generar términos de la siguiente forma:

- $\iota(X)\, S$, donde X no aparece libre en S. Estos términos corresponderían a expresiones en lenguaje natural análogas a *el X tal que el Tajo pasa por Toledo*, expresiones carentes de utilidad —y aún de sentido— para un hablante normal.

- $\iota(X)\, S(X)$, donde X es la única variable libre en S. Este es el caso más habitual. Son términos como *el X tal que X es autor de "Programación en Java 7.0"*.
- $\iota(X)\, S(X,Y)$, donde la variable Y, distinta de X, aparece también libre en S. Estos términos corresponderían a expresiones como *el X tal que es el alumno más aplicado del curso Y*, construcciones que pueden aparecen dentro de enunciados más complejos y que se suelen denominar *descripciones relativas*. En lo sucesivo, supondremos que en las fórmulas estudiadas no aparecen descripciones relativas. En particular, no aplicaremos las traducciones Tci y Tce definidas más adelante a fórmulas que contengan descripciones de este tipo.
- $\iota(X)S(X)$, donde S es una fórmula que contiene a su vez descripciones definidas. Estos términos aparecen de forma natural al simbolizar las expresiones del lenguaje natural. Por ejemplo, supongamos la expresión *el novio del hermano de Vanessa*. Su simbolización más natural sería un término como $\iota(\mathsf{X})\mathsf{novio}(\mathsf{X}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{hermano}(\mathsf{vanessa}, \mathsf{Y}))$.

Ejercicio 2.9 Simbolizar las siguientes expresiones mediante términos de un lenguaje $CP_d^=$:

1. *El rey de Francia.*
2. *El artículo menos conocido de Larra.*
3. *La canción de Raphael que nadie oye sin que se le salten las lágrimas.*
4. *La hija del rey de España.*
5. *El periódico donde se publicó el artículo menos conocido de Larra.*
6. *El estribillo de la canción de Raphael que nadie oye sin que se le salten las lágrimas.*
7. *El marido de la hija del rey de España.*

◁

Ejercicio 2.10 Simbolizar los siguientes discursos en un lenguaje $CP_d^=$. En caso de ambigüedad, dar todas las posibles simbolizaciones.

1. *El rey de Francia es calvo; su mujer y sus hijos, también.*
2. *Si el rey de Francia es calvo, entonces su hijo también es calvo.*
3. *La canción de Raphael que nadie oye sin que se le salten las lágrimas es muy bonita, pero no todas las suyas lo son.*
4. *La hija del rey de España, que juega bien al tute, es rubia.*
5. *La hija del rey de España que juega bien al tute es rubia.*

◁

Los lógicos, desde Bertrand Russell, se han preocupado por determinar el significado que debe darse a las descripciones definidas, especialmente cuando se trata de las llamadas "descripciones impropias o incumplidas", es decir, aquellas que no describen ningún objeto del dominio considerado, bien porque ninguno cumple la condición enunciada (por ejemplo, si pensamos en el estado actual del mundo, nadie es rey de Francia), bien porque la cumplen más de uno (por ejemplo, si pensamos en el estado actual del mundo, hay varias hijas del rey de España). Se han propuesto varias alternativas para ello. Quizás la más radical es ampliar el concepto de interpretación de una teoría de primer orden, permitiendo que la función que pasa de términos del lenguaje a elementos del dominio sea una función parcial ("lógica libre"). Nosotros no seguiremos esa vía, sino que daremos dos posibles alternativas que se mantienen dentro del ámbito de la lógica bivaluada. Podríamos plantearlas directamente, dotando de semántica y axiomática al lenguaje $CP_d^=$; pero en lugar de ello, y siguiendo a Bertrand Russell, procederemos de forma indirecta, dando dos procedimientos de traducción diferentes para pasar del lenguaje $CP_d^=$ al $CP^=$. Ambas traducciones coinciden en el caso de los enunciados atómicos, que exponemos primeramente.

Átomos y descripciones definidas.

La idea intuitiva que formalizamos en esta subsección es la siguiente: cuando se afirma algo de una descripción definida, en realidad se están afirmando tres cosas: i) que existe un objeto que satisface la descripción; ii) que ese objeto es el único que la satisface; y iii) que ese objeto satisface la afirmación dada. Por ejemplo, la paráfrasis de *el novio de Samanta es alto* sería *existe un objeto X tal que X es novio de Samanta; para cualquier otro objeto Y, si Y es novio de Samanta, entonces Y coincide con X; y X es alto.*

Concretando lo anterior, definimos la traducción $Tr(\varphi)$ de una fórmula atómica φ del $CP_d^=$ como sigue:

Definición 2.10 *La traducción $Tr(\varphi)$ de una fórmula atómica φ del $CP_d^=$ es una fórmula del $CP^=$ definida por:*

-
$$\begin{aligned} Tr(p(t_1,\ldots,\iota(V)S,\ldots,t_n)) \Rightarrow \quad \exists V'(\quad & Tr(p(t_1,\ldots,V',\ldots,t_n))\wedge \\ & \forall V''(Tr(S[V/V''] \rightarrow V''=V')\wedge \\ & Tr(S[V/V'])) \end{aligned}$$

  donde V', V'' son variables que no ocurren en $t_1,\ldots,\iota(V)S,\ldots,t_n$

- $Tr(p(t_1,\ldots,t_n)) \Rightarrow p(t_1,\ldots,t_n)$

  si ningún término t_1,..., t_n es una descripción definida.

Ejemplo 2.3 Consideremos el enunciado *El rey de Francia es calvo.* En un lenguaje $CP_d^=$ será $\varphi = \mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))$ y su traducción $Tr(\varphi)$ se calculará como sigue:

$$\begin{aligned} & Tr(\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))) \Rightarrow \\ & \exists \mathsf{V}(\mathsf{Tr}(\mathsf{calvo}(\mathsf{V})) \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{Tr}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W})) \rightarrow \mathsf{W}=\mathsf{V}) \wedge \mathsf{Tr}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}))) \Rightarrow \\ & \exists \mathsf{V}(\mathsf{calvo}(\mathsf{V}) \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W}=\mathsf{V}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V})). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el enunciado *El hijo del rey de Francia es calvo.* En un lenguaje $CP_d^=$ será

$\varphi = \mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{hijo}(\mathsf{X}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})))$.

Calculemos previamente la fórmula

$\varphi_1(Z) = Tr(\mathsf{hijo}(Z, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})))$.

En un paso llegamos a

$\varphi_1(Z) = \exists \mathsf{V}_1(\mathsf{hijo}(\mathsf{Z}, \mathsf{V}_1) \wedge \forall \mathsf{W}_1(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}_1) \to \mathsf{W}_1 = \mathsf{V}_1) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}_1))$

suponiendo que $\mathsf{V}_1, \mathsf{W}_1$ son nuevas en $\varphi(Z)$. Ahora procedemos a calcular

$Tr(\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{hijo}(\mathsf{X}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})))) \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \exists \mathsf{V}(& Tr(\mathsf{calvo}(\mathsf{V}))\wedge \\ & \forall \mathsf{W}(\mathsf{Tr}(\mathsf{hijo}(\mathsf{W}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y}))) \to \mathsf{W} = \mathsf{V})\wedge \\ & Tr(\mathsf{hijo}(\mathsf{V}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})))) \Rightarrow \end{array}$$

$\exists \mathsf{V}(\mathsf{calvo}(\mathsf{V}) \wedge \forall \mathsf{W}(\varphi_1(\mathsf{W}) \to \mathsf{W} = \mathsf{V}) \wedge \varphi_1(\mathsf{V}))$.

Finalmente, consideremos el enunciado *El rey de Francia es amigo del rey de Baviera.* En un lenguaje $CP_d^=$ será

$\varphi = \mathsf{amigo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})), \iota(\mathsf{X})\mathsf{reybaviera}(\mathsf{X}))$.

Calculemos previamente la fórmula

$\varphi_2 = Tr(\mathsf{amigo}(\mathsf{V}, \iota(\mathsf{X})\mathsf{reybaviera}(\mathsf{X})))$.

En un paso llegamos a

$\varphi_2 = \exists \mathsf{V}_1(\mathsf{amigo}(\mathsf{V}, \mathsf{V}_1) \wedge \forall \mathsf{W}_1(\mathsf{reybav}(\mathsf{W}_1) \to \mathsf{W}_1 = \mathsf{V}_1) \wedge \mathsf{reybav}(\mathsf{V}_1))$.

Ahora procedemos a calcular

$Tr(\mathsf{amigo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})), \iota(\mathsf{X})\mathsf{reybaviera}(\mathsf{X}))) \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \exists \mathsf{V}(& Tr(\mathsf{amigo}(\mathsf{V}, \iota(\mathsf{X})\mathsf{reybaviera}(\mathsf{X})))\wedge \\ & \forall \mathsf{W}(\mathsf{Tr}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V})) \to \mathsf{W} = \mathsf{V})\wedge \\ & Tr(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}))) \Rightarrow \end{array}$$

$\exists \mathsf{V}(\varphi_2 \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}) \to \mathsf{W} = \mathsf{V}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}))$

y pasando a la cabeza los cuantificadores existenciales quedará

$$\begin{array}{llll} \exists \mathsf{V}\exists \mathsf{V}_1(& \mathsf{amigo}(\mathsf{V}, \mathsf{V}_1) & & \\ & \forall \mathsf{W}_1(\mathsf{reybav}(\mathsf{W}_1) \to \mathsf{W}_1 = \mathsf{V}_1) & \wedge & \mathsf{reybav}(\mathsf{V}_1) \\ & \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}) \to \mathsf{W} = \mathsf{V}) & \wedge & \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V})) \end{array}$$

$\triangleleft$

Para las siguientes simbolizaciones nos será útil la proposición 2.8.

Proposición 2.8 *Todas las instanciaciones de las siguientes fórmulas son E-válidas:*

1. $\exists X \exists Y X = Y$
2. $\exists X(A(X) \wedge X = c) \leftrightarrow A[X/c]$ *si* X *no está ligada en* A.
3. $\exists X \exists Y(X = Y \wedge A(X, Y)) \leftrightarrow \exists X A[Y/X]$ *si* Y *no está ligada en* A.

Ejercicio 2.11 Probar la E-validez de los esquemas de la proposición 2.8. $\triangleleft$

Consideremos ahora el enunciado *El rey de Francia existe*. Se puede reformular como *Existe alguien que es igual al rey de Francia*, o sea,

$$\exists \mathsf{X}\, \mathsf{X} = \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})$$

cuya traducción será

$$\exists \mathsf{X} \exists \mathsf{Y}(\mathsf{X} = \mathsf{Y} \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{Y}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})))$$

pero, teniendo en cuenta la proposición 2.8, ello es equivalente a

$$\exists \mathsf{Y}(\forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{Y}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})).$$

En general, *Existe el X tal que A(X)* se traducirá pues por

$$\exists X(\forall W(A(W) \rightarrow W = X) \wedge A(X))$$

que es precisamente la traducción propuesta por Russell.

Consideremos ahora el enunciado *El rey de Francia es Luis X*. Introduciendo una constante para *Luis X* será

$$\mathsf{luis10} = \iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y})$$

cuya traducción será

$$\exists \mathsf{Y}(\mathsf{luis10} = \mathsf{Y} \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{Y}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y}))$$

pero, teniendo en cuenta la proposición 2.8, ello es equivalente a

$$\forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{luis10}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{luis10}).$$

En general, *c es el X tal que A(X)* se traducirá pues por

$$\forall W(A(W) \rightarrow W = c) \wedge A(c).$$

Por último, consideremos el enunciado *El rey de Francia es el padre de Luis*. Introduciendo una constante para *Luis* será

$$\iota(\mathsf{Y})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{Y}) = \iota(\mathsf{Y})\mathsf{padre}(\mathsf{luis}, \mathsf{Y})$$

cuya traducción será tras aplicar las reglas

$$\begin{array}{ll}\exists \mathsf{X} \exists \mathsf{Y}(& \mathsf{X} = \mathsf{Y} \wedge \\ & \forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{X}) \wedge \\ & \forall \mathsf{W}(\mathsf{padre}(\mathsf{luis}, \mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{Y}) \wedge \\ & \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}) \wedge \mathsf{padre}(\mathsf{luis}, \mathsf{Y}))\end{array}$$

y, teniendo en cuenta la proposición 2.8, ello es equivalente a

$$\exists \mathsf{X}(\forall \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \vee \mathsf{padre}(\mathsf{luis}, \mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{X}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}) \wedge \mathsf{padre}(\mathsf{luis}, \mathsf{X})).$$

En general, *El X tal que A(X) es el X tal que B(X)* se traducirá pues por

$$\exists X(\forall W(A(W) \vee B(W) \rightarrow W = X) \wedge A(X) \wedge B(X)).$$

Cuantificación de ámbito interno.

¿Qué significa un enunciado en el que se niega algo de una descripción definida? Una posible respuesta es decir que se niega su paráfrasis. Es decir, *el novio de Samanta no es alto* significaría lo mismo que *no es verdad que exista un objeto X que cumpla estas tres condiciones: i) X es novio de Samanta; ii) para cualquier objeto Y, si Y es novio de Samanta, entonces Y coincide con X; y iii) X es alto.*

Formalizando lo anterior y añadiendo a las ya vistas para los átomos reglas recursivas para las conectivas y cuantificadores, definimos recursivamente la traducción con cuantificación de ámbito interno $Tci(\varphi)$ de una fórmula φ del $CP_d^=$ como sigue:

Definición 2.11 *La traducción $Tci(\varphi)$ de una fórmula φ del $CP_d^=$ es una fórmula del $CP^=$ definida por:*

- $Tci(\neg S) \Rightarrow \neg Tci(S)$
- $Tci(S_1 \wedge S_2) \Rightarrow Tci(S_1) \wedge Tci(S_2)$
- $Tci(S_1 \vee S_2) \Rightarrow Tci(S_1) \vee Tci(S_2)$
- $Tci(S_1 \to S_2) \Rightarrow Tci(S_1) \to Tci(S_2)$
- $Tci(S_1 \leftrightarrow S_2) \Rightarrow Tci(S_1) \leftrightarrow Tci(S_2)$
- $Tci(\forall V\ S) \Rightarrow \forall V\ Tci(S)$
- $Tci(\exists V\ S) \Rightarrow \exists V\ Tci(S)$
- $Tci(S) \Rightarrow Tr(S)$*, si S es un átomo.*

Ejemplo 2.4 Vamos a simbolizar *El rey de Francia no es calvo* en el lenguaje $CP_d^=$ y traduciremos la fórmula al $CP^=$ según el esquema anterior. Con los predicados $\mathsf{reyfrancia}$ y calvo en el lenguaje $CP_d^=$ tendremos

$\neg\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))$

y

$\mathsf{Tci}(\neg\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))) \Rightarrow$
$\neg\mathsf{Tci}(\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))) \Rightarrow$
$\neg\exists\mathsf{X}(\mathsf{calvo}(\mathsf{X}) \wedge \forall\ \mathsf{W}(\mathsf{Tci}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W})) \to \mathsf{W} = \mathsf{X}) \wedge \mathsf{Tci}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))) \Rightarrow$
$\neg\exists\mathsf{X}(\mathsf{calvo}(\mathsf{X}) \wedge \forall\ \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \to \mathsf{W} = \mathsf{X}) \wedge \mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})))$

que equivale a

$\forall\mathsf{X}(\neg\mathsf{calvo}(\mathsf{X}) \vee \exists\mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \wedge \neg\mathsf{W} = \mathsf{X}) \vee \neg\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))$ $\triangleleft$

Ejemplo 2.5 . Sea el enunciado *Todos los clientes del mejor amigo del novio de Samanta son políglotas*. Simbolizado en un lenguaje $CP_d^=$ tenemos la fórmula $\varphi =$

$\forall\mathsf{X}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{Y}, \iota(\mathsf{Z})\mathsf{novio}(\mathsf{Z}, \mathsf{samanta})) \to \mathsf{poliglota}(\mathsf{X}))$

y la traducción será $Tci(\varphi) \Rightarrow$
$\forall\mathsf{X}(\mathsf{Tci}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X}, \iota(\mathsf{Y})\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{Y}, \iota(\mathsf{Z})\mathsf{novio}(\mathsf{Z}, \mathsf{samanta})) \to \mathsf{poliglota}(\mathsf{X}))) \Rightarrow$
(eliminando la descripción más externa)

$\forall \mathsf{X}(\exists \mathsf{V}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X},\mathsf{V}) \wedge \mathsf{mejoramigo}(\mathsf{V},\iota(\mathsf{Z})\mathsf{novio}(\mathsf{Z},\mathsf{samanta}))$
$\wedge\forall\ \mathsf{W}(\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{W},\iota(\mathsf{Z})\mathsf{novio}(\mathsf{Z},\mathsf{samanta})) \rightarrow \mathsf{W}=\mathsf{V}) \rightarrow \mathsf{poliglota}(\mathsf{X}))\Rightarrow$
(renombrando)
$\forall \mathsf{X}(\exists \mathsf{V}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X},\mathsf{V})\wedge$
$\exists \mathsf{V}'(\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{V},\mathsf{V}') \wedge \forall \mathsf{W}'(\mathsf{novio}(\mathsf{W}',\mathsf{samanta}) \rightarrow \mathsf{W}'=\mathsf{V}')\wedge$
$\mathsf{novio}(\mathsf{V}',\mathsf{samanta})\wedge$
$\forall\ \mathsf{W}(\exists \mathsf{V}''(\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{W},\mathsf{V}'') \wedge \forall\ \mathsf{W}'(\mathsf{novio}(\mathsf{W}',\mathsf{samanta}) \rightarrow \mathsf{W}'=\mathsf{V}'')$
$\wedge \mathsf{novio}(\mathsf{V}'',\mathsf{samanta})) \rightarrow \mathsf{W}=\mathsf{V})$
$\rightarrow \mathsf{poliglota}(\mathsf{X}))$. $\triangleleft$

Ejercicio 2.12 Simbolizar los siguientes enunciados en un lenguaje $CP_d^=$ y hallar su traducción Tci al $CP^=$:

1. *Si el rey de Francia es calvo, entonces el emperador de Alemania también lo es.*

2. *Si el rey de Francia es Luis X, entonces es calvo.*

3. *El rey de Francia y su mujer no son primos.*

$\triangleleft$

Para lo que sigue, ampliaremos la notación dada para la sustitución en fórmulas del CP, de forma que admitiremos también expresiones como $\varphi[t/t']$, siendo t y t' términos cualesquiera.

Proposición 2.9 *Sea a una constante y sea $\varphi(a)$ una fórmula válida del $CP^=$. Entonces, para cualquier descripción definida $\iota(V)S$, se tiene que $Tci(\varphi[a/\iota(V)S])$ es una fórmula válida del $CP^=$*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre la longitud de $\varphi(a)$. $\triangleleft$

Por ejemplo, consideremos el siguiente enunciado: *El rey de Francia es alto o no lo es.* La proposición anterior nos permite asegurar que su simbolización mediante la traducción externa es válida, pues puede obtenerse por sustitucion a partir de la tautología $\mathsf{alto}(\mathsf{a}) \vee \neg\mathsf{alto}(\mathsf{a})$.

Ejercicio 2.13 Sea el enunciado: *No existe el rey de Francia, pero el rey de Francia no es calvo.*

1. Representarlo en un lenguaje $CP_d^=$

2. Dar una traducción Tci del mismo

3. Dar un modelo de la traducción Tci

$\triangleleft$

Cuantificación de ámbito extenso.

La idea intuitiva de la que partimos al aplicar la cuantificación de ámbito extenso es diferente, a saber: emplear una descripción definida es asegurar la existencia del objeto descrito, independientemente del contexto. De esta manera, tanto cuando se afirma como cuando se niega algo de una descripción definida, estamos afirmando: i) que existe un objeto que satisface la descripción; y ii) que ese objeto es el único que la satisface. Es decir, *El novio de Samanta no es alto* significa lo mismo que *Existe un objeto X tal que X es novio de Samanta; para cualquier objeto Y, si Y es novio de Samanta, entonces Y coincide con X; y X no es alto.* Y en cuanto a *El novio de Samanta es alto o no lo es* significa lo mismo que *Existe un objeto X tal que X es novio de Samanta; para cualquier objeto Y, si Y es novio de Samanta, entonces Y coincide con X; y X es alto o no es alto.*

Formalizando lo anterior, definimos la traducción de ámbito extenso $Tce(\varphi)$ de una fórmula φ del $CP_d^=$ como sigue: sean $\iota(V)S_1,\ldots,\iota(V)S_n$ todas las descripciones definidas que aparecen en φ (supondremos, sin pérdida de generalidad, que la variable cuantificada V es la misma en todas ellas). Sean $V_1,\ldots,V_n$ variables que no aparecen en φ; las asociaremos a las descripciones $\iota(V)S_1,\ldots,$ $\iota(V)S_n$ respectivamente. Dada una descripción $\iota(V)S_i$, entenderemos por S'_i la fórmula resultante de sustituir en S_i cada aparición de una descripción $\iota(V)S_j$ por la variable correspondiente V_j. Por φ' entenderemos la fórmula resultante de sustituir en φ toda descripción $\iota(V)S_k$ que no caiga bajo el alcance de otra descripción por V_k, i.e., toda descripción $\iota(V)S_k$ tal que que no exista una subfórmula en φ de la forma $\iota(V)S_j(\iota(V)S_k)$. Entonces

Definición 2.12 *La traducción con cuantificación de ámbito extenso $Tce(\varphi)$ de una fórmula φ del $CP_d^=$ viene dada por la fórmula*

$$\begin{array}{l}\exists V_1\ldots\exists V_n\\ \quad (S'_1[V/V_1]\wedge\ldots\wedge S'_n[V/V_n]\\ \quad \wedge\forall\, W(S'_1[V/W]\to W=V_1)\wedge\ldots\wedge\forall W(S'_n[V/W]\to W=V_n)\\ \quad \wedge\varphi')\end{array}$$

Ejemplo 2.6 Vamos a simbolizar *El rey de Francia no es calvo* en el lenguaje $CP_d^=$ y traduciremos la fórmula al $CP^=$ con cuantificación de ámbito extenso. Con los predicados $\mathsf{reyfrancia}$ y calvo en el lenguaje $CP_d^=$ tendremos como en la sección anterior $\neg\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))$. Solamente hay una descripción S_1 que es $\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})$ y que, por otra parte, no contiene otras descripciones. La fórmula φ' será $\neg\mathsf{calvo}(\mathsf{V}_1)$y la descripción S'_1 coincide con S_1. Por tanto

$$\begin{array}{l}\mathsf{Tce}(\neg\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})))\Rightarrow\\ \exists\mathsf{V}_1(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}_1)\wedge\forall\mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W})\to\mathsf{W}=\mathsf{V}_1)\wedge\neg\mathsf{calvo}(\mathsf{V}_1))\end{array}$$

que **no** equivale a $\mathsf{Tci}(\neg\mathsf{calvo}(\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})))$.

Consideremos de nuevo el enunciado propuesto en el ejemplo 2.4: *Todos los clientes del mejor amigo del novio de Samanta son políglotos.* La correspondiente simbolización en un lenguaje $CP_d^=$ es la siguiente:

$$\forall\mathsf{X}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X},\iota(\mathsf{Y})\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{Y},\iota(\mathsf{Z})\mathsf{novio}(\mathsf{Z},\mathsf{s})))\to\mathsf{poliglota}(\mathsf{X})).$$

Tenemos ahora la traducción Tce:

$$\exists\mathsf{V}_1\exists\mathsf{V}_2(\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{V}_1,\mathsf{V}_2)\wedge\mathsf{novio}(\mathsf{V}_2,\mathsf{s})$$

$\wedge\forall \mathsf{W}(\mathsf{mejoramigo}(\mathsf{W},\mathsf{V}_2) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{V}_1) \wedge \forall \mathsf{W}(\mathsf{novio}(\mathsf{W},\mathsf{s}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{V}_2)$
$\wedge\forall \mathsf{X}(\mathsf{cliente}(\mathsf{X},\mathsf{V}_1) \rightarrow \mathsf{poliglota}(\mathsf{X}))) \triangleleft$

Vemos, pues, que ambos procesos de traducción no llevan siempre a fórmulas equivalentes del $CP^=$. La proposición siguiente nos da una condición suficiente para que esta equivalencia se produzca.

Proposición 2.10 *Sea φ una fórmula cualquiera del $CP_d^=$. $Tce(\varphi) \leftrightarrow Tci(\varphi)$ es una fórmula válida del $CP^=$ si φ no contiene apariciones de las conectivas $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.*

Demostración: Por inducción sobre la longitud de φ. $\triangleleft$

Ejercicio 2.14 . Simbolizar los siguientes enunciados en un lenguaje $CP_d^=$ y hallar su traducción Tce al $CP^=$:

1. *Si el rey de Francia es calvo, entonces el emperador de Alemania también lo es.*
2. *Si el rey de Francia es Luis X, entonces es calvo.*
3. *El rey de Francia y su mujer no son primos.*

$\triangleleft$

El esquema de traducción Tce tiene la siguiente deseable propiedad, cuya demostración es trivial:

Proposición 2.11 *Sea a una constante cualquiera y sea $\varphi(a)$ una fórmula cualquiera del $CP^=$. Sea $\psi(a)$ tal que $\models \varphi(a) \leftrightarrow \psi(a)$. Entonces, para cualquier descripción definida $\iota(V)S$, se tiene que $Tce(\varphi[a/\iota(V)S]) \leftrightarrow Tce(\psi[a/\iota(V)S])$ es una fórmula válida del $CP^=$.*

Sin embargo, la traducción Tce carece de la propiedad de conservación de la validez (proposición 2.9) que tiene la traducción Tci. Por ejemplo, consideremos la fórmula tautológica $\mathsf{alto}(\mathsf{a}) \vee \neg\mathsf{alto}(\mathsf{a})$. Sustituyendo a por una descripción tenemos

$\mathsf{alto}((\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X})) \vee \neg\mathsf{alto}((\iota(\mathsf{X})\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{X}))$.

Su traducción Tce es

$\exists \mathsf{V}_1(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{V}_1) \wedge \forall\, \mathsf{W}(\mathsf{reyfrancia}(\mathsf{W}) \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{V}_1) \wedge (\mathsf{alto}(\mathsf{V}_1) \vee \neg\mathsf{alto}(\mathsf{V}_1)))$

que obviamente no es una tautología.

Por el contrario, el resultado en cierta forma contraintuitivo del ejercicio 2.13 no se obtiene en la traducción Tce, como se demuestra fácilmente:

Proposición 2.12 *Sea a una constante cualquiera y sea $\varphi(a)$ una fórmula cualquiera del $CP^=$. Entonces, para cualquier descripción definida $\iota(V)S$, se tiene que $Tce(\varphi[a/\iota(V)S] \wedge \neg\exists V\ S)$ es una fórmula insatisfacible del $CP^=$.*

Ejemplo 2.7 Vamos a simbolizar el siguiente enunciado y estudiar la validez de sus traducciones: *Si Juan es el marido de Loli y el autor de "Programación en Java 7.0", entonces el marido de Loli es el autor de "Programación en Java 7.0"*

Tendremos los siguientes elementos sintácticos:

- Constantes: *Juan*: j; *Loli*: l; *"Programación en Java 7.0"*: $\mathsf{p7}$.
- Predicados: *X es marido de Y*: $\mathsf{marido(X,Y)}$; *X es autor de Y*: $\mathsf{autor(X,Y)}$.
- Descripciones definidas: *el marido de Loli*: $\iota(\mathsf{V})\mathsf{marido(V,l)}$; *el autor de "Programación en Java 7.0"*: $\iota(\mathsf{V})\mathsf{autor(V,p7)}$.

La traducción con cuantificadores internos será

$$\begin{array}{l}(\mathsf{marido(j,l)} \wedge \forall \mathsf{Y}(\mathsf{marido(Y,l)} \rightarrow \mathsf{j} = \mathsf{Y}) \wedge \\ \mathsf{autor(j,p7)} \wedge \forall \mathsf{Y}(\mathsf{autor(Y,p7)} \rightarrow \mathsf{j} = \mathsf{Y}) \\ \quad \rightarrow \\ \exists \mathsf{X}(\forall \mathsf{W}(\mathsf{marido(W,l)} \vee \mathsf{autor(W,p7)} \rightarrow \mathsf{W} = \mathsf{X}) \wedge \mathsf{marido(X,l)} \wedge \mathsf{autor(X,p7)})\end{array}$$

que es válida por las leyes del CP (es una instancia del contrarrecíproco del axioma 9 de **KLC**).
La traducción con cuantificadores externos será

$$\begin{array}{l}\exists \mathsf{V}_1 \exists \mathsf{V}_2(\mathsf{marido}(\mathsf{V}_1,\mathsf{l}) \wedge \forall \mathsf{Y}(\mathsf{marido(Y,l)} \rightarrow \mathsf{V}_1 = \mathsf{Y}) \\ \quad \wedge \mathsf{autor}(\mathsf{V}_2,\mathsf{p7}) \wedge \forall \mathsf{Y}(\mathsf{autor(Y,p7)} \rightarrow \mathsf{V}_2 = \mathsf{Y}) \\ \quad \wedge(\mathsf{j} = \mathsf{V}_1 \wedge \mathsf{j} = \mathsf{V}_2 \rightarrow \mathsf{V}_1 = \mathsf{V}_2))\end{array}$$

que es obviamente inválida (es muy fácil dar un contramodelo). $\triangleleft$

Ejercicio 2.15 Simbolizar los siguientes enunciados en un lenguaje $CP_d^=$ y estudiar la validez de sus traducciones:

1. *O Juan no es el marido de Loli, o no existe el marido de Loli, o Juan es el marido de Loli.*
2. *Si Juan es el marido de Loli y el autor del libro "Programación en Java 7.0", entonces el marido de Loli existe y es autor de algún libro.*
3. *Si Juan no es el marido de Loli, entonces hay alguien —distinto de Juan— que lo es.*

$\triangleleft$

El lector se preguntará quizás qué traducción es la más apropiada. La respuesta es difícil; en realidad, si un enunciado hace uso de descripciones impropias, el hablante tiende a considerarlo sin significado.

2.7. DEMOSTRACIÓN AUTOMÁTICA.

Ampliaremos los métodos de resolución vistos en el capítulo anterior para tratar fórmulas con igualdad.

2.7.1. RESOLUCIÓN/UNIFICACIÓN PURA.

Con los conocimientos ya adquiridos para el *CP*, podríamos enunciar un método general para la demostración automática en el $CP^=$. En efecto, bastaría para ello añadir explícitamente todos los axiomas de la igualdad —en forma clausal— de la teoría y emplear el método de resolución/unificación de la tabla 1.7. En el siguiente ejemplo se aplica este procedimiento.

Ejemplo 2.8 Sea Γ una teoría con igualdad con los axiomas propios

$$\{\mathsf{p(a), a = b, s(b) = c},\\ \forall\mathsf{X(p(X) \to p(s(X)))}\}.$$

Probaremos por el método de resolución que $\Gamma \models \mathsf{p(c)}$. El conjunto en forma clausal está formado por las cláusulas 1-4 de la figura 2.1. Los axiomas de la igualdad $Eq(\Gamma)$ son las cláusulas 5-9; el objetivo negado, la cláusula 10. Las restantes cláusulas 11-17 constituyen la prueba buscada. ◁

1.	$\mathsf{p(a)}$	
2.	$\mathsf{a = b}$	
3.	$\mathsf{s(b) = c}$	
4.	$\neg\mathsf{p(X)} \vee \mathsf{p(s(X))}$	
5.	$\mathsf{X = X}$	
6.	$\neg\mathsf{X = Y} \vee \mathsf{Y = X}$	
7.	$\neg\mathsf{X = Y} \vee \neg\mathsf{Y = Z} \vee \mathsf{X = Z}$	
8.	$\neg\mathsf{X = Y} \vee \neg\mathsf{p(X)} \vee \mathsf{p(Y)}$	
9.	$\neg\mathsf{X = Y} \vee \mathsf{s(X) = s(Y)}$	
10.	$\neg\mathsf{p(c)}$	
11.	$\mathsf{p(s(a))}$	de 1 y 4
12.	$\mathsf{s(a) = s(b)}$	de 2 y 9
13.	$\neg\mathsf{p(s(a))} \vee \mathsf{p(s(b))}$	de 12 y 8
14.	$\mathsf{p(s(b))}$	de 13 y 11
15.	$\neg\mathsf{p(s(b))} \vee \mathsf{p(c)}$	de 3 y 8
16.	$\mathsf{p(c)}$	de 15 y 14
17.	$\square$	de 16 y 10

Figura 2.1: Una demostración por resolución en el $CP^=$

Ejercicio 2.16 Consideremos de nuevo el ejercicio 2.7. Se pide:

1. Estudiar por resolución si el argumento es válido.
2. Id. si se añade la premisa *Ningún trapecista es vigilante de la playa.*
3. Id. si se añade la premisa *Pepi tiene exactamente un empleo* y el conocimiento de sentido común necesario acerca de qué predicados representan empleos.

◁

El lector se habrá dado cuenta de que el uso del principio “sustituir iguales por iguales” se lleva a cabo en este método vía resolución con los axiomas de sustituibilidad de la teoría. Ello hace que la demostración resulte bastante farragosa; una alternativa es introducir nuevos principios de inferencia, además del de resolución, y suprimir los axiomas de la igualdad, salvo el de reflexividad. Esto es lo que hacemos en la subsección siguiente.

2.7.2. PARAMODULACIÓN.

En este apartado seguiremos usando la convención de notación ya introducida al exponer el método de los árboles: sea $L(t)$ un literal cualquiera que contiene el término t, entonces $L[s]$ es el resultado de sustituir **una** aparición de t por s en $L(t)$.

Definición 2.13 *(*Paramodulación de base*). Sean C_1 y C_2 dos cláusulas de base y sean s, t términos de base. Sea C_1 de la forma $C_1' \vee L(t)$ y sea C_2 de la forma $C_2' \vee t = s$. Entonces la cláusula $L[s] \vee C_1' \vee C_2'$ es una* paramodulante de base *de C_1 y C_2. En ese caso decimos también que hemos aplicado* paramodulación de base *en C_1 a partir de C_2.*

Por ejemplo, la paramodulante de base de $\mathsf{p(a)} \vee \mathsf{q(b)}$ y $\mathsf{a} = \mathsf{b} \vee \mathsf{r(b)}$ es $\mathsf{p(b)} \vee \mathsf{q(b)} \vee \mathsf{r(b)}$.

Definición 2.14 *(*Paramodulación binaria*). Sean C_1 y C_2 un par de cláusulas que no tienen variables en común. Supongamos que C_1 es $L(t) \vee C_1'$ y C_2 es $r = s \vee C_2'$. Sea σ un umg de $\{t, r\}$. Entonces la cláusula*

$$L\sigma[s\sigma] \vee C_1'\sigma \vee C_2'\sigma$$

es una paramodulante binaria de C_1 y C_2. Los literales L y $r = s$ son los literales paramodulados. Decimos también que hemos aplicado paramodulación en C_1 a partir de C_2.

Por ejemplo, sean las cláusulas $C_1 = \mathsf{p(g(f(X)))} \vee \mathsf{q(X)}$ y $C2 = \mathsf{f(g(b))} = \mathsf{a} \vee \mathsf{r(g(c))}$. El *umg* de $\mathsf{f(X)}$ y $\mathsf{f(g(b))}$es $\sigma = \{\mathsf{X/g(b)}\}$y una paramodulante binaria de C_1 y C_2 es $\mathsf{p(g(a))} \vee \mathsf{q(g(b))} \vee \mathsf{r(g(c))}$.

Definición 2.15 *(*Paramodulante*). Sean C_1 y C_2 un par de cláusulas que no tienen variables en común. Cualquiera de las siguientes paramodulantes binarias es una* paramodulante *de C_1 y C_2:*

1. *Una paramodulante binaria de C_1 y C_2*
2. *Una paramodulante binaria de C_1 y un factor de C_2*
3. *Una paramodulante binaria de un factor de C_1 y C_2*
4. *Una paramodulante binaria de un factor de C_1 y un factor de C_2.*

Ejemplo 2.9 Sean dos cláusulas C_1: $\mathsf{p(f(X, g(X)))} \vee \mathsf{q(X)}$ y C_2: $\mathsf{a} = \mathsf{b} \vee \mathsf{g(a)} = \mathsf{a} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$. Vamos a hallar todas las paramodulantes de C_1 y C_2. Consideremos $\mathsf{a} = \mathsf{b}$ de C_2. Consideremos en C_1 el término X. Unificando $\mathsf{a, X}$

$\mathsf{p(f(b, g(a))} \vee \mathsf{q(a)} \vee \mathsf{g(a)} = \mathsf{a} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$
$\mathsf{p(f(a, g(b))} \vee \mathsf{q(a)} \vee \mathsf{g(a)} = \mathsf{a} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$
$\mathsf{p(f(a, g(a))} \vee \mathsf{q(b)} \vee \mathsf{g(a)} = \mathsf{a} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$

No hay más términos en C_1 unificables con a. Consideremos $\mathsf{g(a)} = \mathsf{a}$ de C_2. Unifiquemos $\mathsf{g(a)}$ con X:

$\mathsf{p(f(a, g(g(a))))} \vee \mathsf{q(g(a))} \vee \mathsf{a} = \mathsf{b} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$
$\mathsf{p(f(g(a), g(a)))} \vee \mathsf{q(g(a))} \vee \mathsf{a} = \mathsf{b} \vee \mathsf{f(a, g(a))} = \mathsf{b}$

$\mathsf{p(f(g(a), g(g(a)))) \vee q(a) \vee a = b \vee f(a, g(a)) = b}$

Unifiquemos $\mathsf{g(X)}$ con $\mathsf{g(a)}$:

$\mathsf{p(f(a, a)) \vee q(a) \vee a = b \vee f(a, g(a)) = b}$

Consideremos $\mathsf{f(a, g(a)) = b}$ de C_2. Unifiquemos $\mathsf{f(a, g(a))}$ con X

$\mathsf{p(f(b, g(f(a, g(a))))) \vee q(f(a, g(a))) \vee a = b \vee g(a) = a}$
$\mathsf{p(f(f(a, g(a)), g(b))) \vee q(f(a, g(a))) \vee a = b \vee g(a) = a}$
$\mathsf{p(f(f(a, g(a)), g(f(a, g(a))))) \vee q(b) \vee a = b \vee g(a) = a}$

Unifiquemos $\mathsf{f(a, g(a))}$ con $\mathsf{f(X, g(X))}$

$\mathsf{p(b) \vee q(a) \vee a = b \vee g(a) = a}$

Estrictamente, estos son todos los paramodulantes. Si permitimos también unificar con los segundos términos de las igualdades tendremos además los siguientes. Consideremos $\mathsf{a = b}$ de C_2. Consideremos en C_1 el término X. Unificando $\mathsf{b, X}$

$\mathsf{p(f(a, g(b)) \vee q(b) \vee g(a) = a \vee f(a, g(a)) = b}$
$\mathsf{p(f(b, g(a)) \vee q(b) \vee g(a) = a \vee f(a, g(a)) = b}$
$\mathsf{p(f(b, g(b)) \vee q(a) \vee g(a) = a \vee f(a, g(a)) = b}$

No hay más términos en C_1 unificables con b. Consideremos $\mathsf{g(a) = a}$ de C_2. Unifiquemos a con X

$\mathsf{p(f(g(a), g(a)) \vee q(a) \vee a = b \vee f(a, g(a)) = b}$
$\mathsf{p(f(a, g(g(a))) \vee q(a) \vee a = b \vee f(a, g(a)) = b}$
$\mathsf{p(f(a, g(a)) \vee q(g(a)) \vee a = b \vee f(a, g(a)) = b}$

Consideremos $\mathsf{f(a, g(a)) = b}$ de C_2. Unifiquemos b con X

$\mathsf{p(f(f(a, g(a)), g(b)) \vee q(b) \vee a = b \vee g(a) = a}$
$\mathsf{p(f(b, g(f(a, g(a)))) \vee q(b) \vee a = b \vee g(a) = a}$
$\mathsf{p(f(b, g(b)) \vee q(f(a, g(a))) \vee a = b \vee g(a) = a}$

$\triangleleft$

El método de demostración por resolución y paramodulación es análogo al expuesto en la tabla 1.7, con las siguientes modificaciones:

- Al conjunto inicial de clásulas se añade el axioma reflexivo $\mathsf{X = X}$.
- Los pasos 5 y 6 se modifican, de manera que se toman en consideración no sólo las resoluciones, sino también todas las posibles paramodulaciones aún no efectuadas.

El método se muestra en la tabla 2.2. Probar su corrección es fácil:

Lema 2.2 *Si el método de resolución/paramodulación devuelve EXITO partiendo de* Γ *como conjunto de cláusulas inicial, entonces* Γ *es* E*-insatisfacible.*

DEMOSTRACIÓN: Análoga a la del lema 1.10, considerando que la regla de paramodulación preserva la E-satisfacibilidad. $\triangleleft$

```
1. FORMULAS ← PREMISAS ∪ {NEGACION de la CONCLUSION};
2. FORMULAS ← FN_Sk(FORMULAS);
3. CLAUSULAS ← Descomponer las FORMULAS según las
   conjunciones ∪ {X = X};
4. CLAUSULAS ← Renombrar variables de CLAUSULAS;
   Mientras la cláusula vacía no pertenezca a CLAUSULAS
       5. Si existe un par C1, C2 de CLAUSULAS
       resolubles en conjuntos de literales Λ1+, OΛ2-,
       o paramodulables en Λ1, t = s, que aún no se han
       resuelto o paramodulado,
           entonces aplicar la correspondiente regla
           a C1, C2 produciendo una resolvente o
           paramodulante C3
           si no, devolver FRACASO;
       6. Añadir C3 a CLAUSULAS;
   fin-mientras;
 7 Devolver EXITO;
```

Cuadro 2.2: Método de resolución/paramodulación para el CP.

Teorema 2.5 *(Corrección del método de resolución/paramodulación para el $CP^{=}$).*

1. *Si el método devuelve $EXITO$ partiendo de $C_{\neg\varphi}$ como conjunto de cláusulas inicial, φ es E-válida.*

2. *Si el método devuelve $EXITO$ partiendo de $C_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\neg\varphi\}}$ como conjunto de cláusulas inicial, la argumentación $(\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}, \varphi)$ es E-válida.*

DEMOSTRACIÓN: Análoga a la del teorema 1.8. ◁

En cuanto a la prueba de la completitud, la cuestión es algo más compleja. Expondremos las líneas generales de la demostración debida a D. Brand (Brand, 1975), pero no rellenaremos todos los detalles. La demostración se basa en el concepto de "cláusula en E-forma"(definición 2.16). Brand prueba primeramente que la satisfacibilidad de un conjunto Γ de cláusulas en E-forma al que se añaden los axiomas de asociatividad y reflexividad equivale a la E-satisfacibilidad de Γ (lema 2.3). Tras esto, define un procedimiento que transforma una cláusula cualquiera $C \in \Gamma$ en una cláusula equivalente C' que está en E-forma (definición 2.17); por último, prueba que toda refutación obtenida por resolución binaria y factorización a partir de un conjunto de cláusulas normalizadas en

E-forma se puede transformar en una refutación por resolución binaria, factorización y paramodulación. (lema 2.4.) Puesto que la resolución con el axioma asociativo también se puede simular mediante paramodulación, finalmente se obtiene que el uso de resolución y paramodulación sobre $\Gamma \cup \{\mathsf{X} = \mathsf{X}\}$ es suficiente para probar la E-insatisfacibilidad de Γ (lema 2.5). A partir del lema, es inmediato demostrar el teorema de completitud (teorema 2.6).

Definición 2.16 *Sea C un cláusula. C está en E-forma si todos los términos o subtérminos que aparecen en C son variables, salvo acaso los argumentos del predicado de igualdad $=$.*

Por ejemplo,

$$\mathsf{p(X,Y)} \vee \mathsf{f(X)} = \mathsf{Y}$$
$$\mathsf{p(X,Y)} \vee \neg\mathsf{f(X)} = \mathsf{W} \vee \mathsf{W} = \mathsf{a}$$

están en E-forma, pero

$$\neg\mathsf{f(a)} = \mathsf{g(a)}$$
$$\mathsf{p(a,X)} \vee \mathsf{q(Y,f(b)}$$

no lo están.

Lema 2.3 *Sea Γ un conjunto de cláusulas en E-forma. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\mathsf{X} = \mathsf{X}, \neg\mathsf{X} = \mathsf{Y} \vee \neg\mathsf{Y} = \mathsf{Z} \vee \mathsf{X} = \mathsf{Z}\}$. Si Γ' es satisfacible, entonces Γ es E-satisfacible.*

Definición 2.17 *La E-modificación $Modf(C)$ de una cláusula C se define recursivamente como sigue:*

1. *Si C contiene un literal L donde aparece un predicado p (distinto de $=$) y uno de los argumentos de p es un término t no variable, entonces C' es el resultado de sustituir L por $\neg t = W \vee L[t/W]$, donde W es una nueva variable, y $Modf(C) = Modf(C')$*

2. *Si C contiene un literal L de la forma $t_1 = t_2$ o $\neg t_1 = t_2$ y t_1 (ó t_2) tiene como uno de sus argumentos un término t no variable, entonces C' es el resultado de sustituir L por $\neg t = W \vee L[t/W]$, donde W es una nueva variable, y $Modf(C) = Modf(C')$*

3. *En otro caso, $Modf(C) = C$.*

Si Γ es un conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$, la E-modificación de Γ es $Modf(\Gamma)$ $= \{Modf(C_1), \ldots, Modf(C_n)\}$.

Por ejemplo, sea la cláusula C

$$\mathsf{p(f(a,g(X)))} \vee \mathsf{f(X,Y)} = \mathsf{g(a)}.$$

Su modificación $Modf(C)$ es

$$\neg\mathsf{a} = \mathsf{U} \vee \neg\mathsf{g(X)} = \mathsf{V} \vee \neg\mathsf{f(U,V)} = \mathsf{W} \vee \mathsf{p(W)} \vee \neg\mathsf{a} = \mathsf{Z} \vee \mathsf{f(X,Y)} = \mathsf{g(Z)}.$$

Lema 2.4 *Sea Γ un conjunto de cláusulas. Sea $\mathfrak{R}$ una refutación por resolución binaria y factorización de $Modf(\Gamma) \cup \{\mathsf{X} = \mathsf{X}\}$, es decir, una sucesión de conjuntos de cláusulas que parte de $Modf(\Gamma) \cup \{\mathsf{X} = \mathsf{X}\}$ y acaba conteniendo $\Box$, tal que cada conjunto se obtiene añadiendo una nueva cláusula obtenida por resolución binaria y factorización. Entonces existe una refutación por resolución binaria, factorización y paramodulación de $\Gamma \cup \{\mathsf{X} = \mathsf{X}\}$.*

Lema 2.5 *Sea Γ un conjunto de cláusulas. Si Γ es E-insatisfacible, entonces a partir de* $\Gamma \cup \{X = X\}$ *se puede obtener la cláusula vacía mediante resolución y paramodulación.*

Teorema 2.6 *(Completitud del método de resolución/paramodulación para el $CP^{=}$).*

1. *Si φ es válida, hay una estrategia de resolución/paramodulación tal que el método devuelve $EXITO$ partiendo de $C_{\neg\varphi} \cup \{X = X\}$ como conjunto de cláusulas inicial.*

2. *Si la argumentación $(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \varphi)$ es E-válida, hay una estrategia de resolución/paramodulación tal que el método devuelve $EXITO$ partiendo de $C_{\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}} \cup \{X = X\}$ como conjunto de cláusulas inicial.*

Ejemplo 2.10 Sea el conjunto de cláusulas Γ dado por las 1-6 de la figura 2.2. Empleando paramodulación y resolución se generan las cláusulas 7-14 de la misma figura, que constituyen una prueba de la inconsistencia de Γ. Por supuesto, existen muchas otras demostraciones de esta inconsistencia. $\triangleleft$

0.	$X = X$	
1.	$r(a) \vee r(b)$	
2.	$\neg d(Y) \vee l(a, Y)$	
3.	$\neg r(X) \vee \neg q(Y) \vee \neg l(X, Y)$	
4.	$d(a) \vee q(a)$	
5.	$q(b) \vee \neg r(b)$	
6.	$a = b$	
7.	$\neg r(a) \vee \neg q(Y) \vee \neg d(Y)$	de 2 y 3, X/a
8.	$\neg r(a) \vee \neg q(a)$	de 7 y 4, Y/a
9.	$\neg r(a) \vee \neg q(b)$	de 8 y 6, paramodulación
10.	$\neg r(a) \vee \neg r(b)$	de 9, 5
11.	$\neg r(b)$	de 10 y 6, paramodulación
12.	$\neg r(a)$	de 11 y 6, paramodulación
13.	$r(a)$	de 11 y 1
14.	$\square$	

Figura 2.2: Una demostración por paramodulación en el $CP^{=}$

Ejercicio 2.17 Sea Γ el conjunto de cláusulas

$a = b \vee p(X)$
$\neg p(Y) \vee q(X)$
$\neg q(a) \vee r(a, b)$
$\neg r(a, X)$
$q(c) \vee p(a) \vee b = c$
$r(X, b) \vee a = c$

Se pide probar a partir de Γ, empleando paramodulación y resolución, la cláusula $\neg q(b)$. ¿Es posible probar a partir de $\emptyset$, empleando paramodulación y resolución, la cláusula $q(b)$? $\triangleleft$

Ejercicio 2.18 Consideremos una teoría T de primer orden con igualdad con los axiomas propios

$$\forall X \forall Y\ \mathsf{f}(\mathsf{X},\mathsf{Y}) = \mathsf{f}(\mathsf{Y},\mathsf{X})$$
$$\forall X \forall Y\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{X},\mathsf{Y}),\mathsf{Z}) = \mathsf{f}(\mathsf{X},\mathsf{f}(\mathsf{Y},\mathsf{Z}))$$
$$\forall X\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{X}),\mathsf{g}(\mathsf{X})) = \mathsf{g}(\mathsf{X})$$
$$\forall X\ \mathsf{p}(\mathsf{X},\mathsf{g}(\mathsf{X}))$$
$$\forall X \forall Y (\mathsf{p}(\mathsf{X},\mathsf{Y}) \rightarrow \mathsf{p}(\mathsf{X},\mathsf{f}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})))$$
$$\mathsf{q}(\mathsf{a})$$

Demostrar por refutación, empleando resolución y paramodulación,

$$\forall X \forall Y\ \mathsf{p}(\mathsf{X},\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{Y}),\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{X}),\mathsf{g}(\mathsf{X})))) \ \triangleleft$$

Ejercicio 2.19 (vd. ejercicio 2.2). Sea X un conjunto ordenado mediante una relación de orden parcial $\leq$. Se dice que un elemento y de X es *maximal* de X si cualquier elemento x de X cumple: si $y \leq x$, entonces $x = y$. Se dice que un elemento y de X es *máximo* de X si para todo x de X se cumple que $x \leq y$. Se pide:

1. Expresar formalmente las definiciones de ser elemento maximal y máximo.
2. Demostrar empleando paramodulación y resolución que existe a lo sumo un elemento máximo.

$\triangleleft$

2.7.3. DEMODULACIÓN Y RESCRITURA.

El principio de "sustituir por cosas iguales" es el que, de una forma u otra, hemos empleado hasta este momento para razonar en teorías con igualdad. En la práctica, sin embargo, el principio que usamos, siempre que sea posible, es levemente diferente: lo que hacemos es "sustituir por cosas iguales, pero más simples". La concreción y formalización de este principio lleva a lo que se llama "sistemas de rescritura" (en los ambientes más teóricos) o "razonamiento por demodulación" (en los contextos más aplicados). Estos sistemas tienen gran importancia tanto teórica (pues a través de ellos se enlaza con problemas clásicos del Álgebra, como el *problema de la palabra*) como práctica (pues, a menos que se emplee alguna forma de demodulación, la explosión combinatoria rápidamente hace inviable razonar automáticamente en teorías con igualdad).

Definición 2.18 Correspondencia (matching). *Dados dos términos φ y ψ, se dice que ψ se corresponde con φ cuando existe una sustitución σ tal que $\psi = \varphi.\sigma$.*

Por ejemplo, $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))$ se corresponde con $\mathsf{f}(\mathsf{X})$, pero no al contrario.

Definición 2.19 *Sea un lenguaje de primer orden $CP(\Omega)$. Sea $term(\Omega)$ el conjunto de sus términos. Una regla de rescritura es un par (izq, der), donde $izq \in term(\Omega)$, $der \in term(\Omega)$. Denotaremos una regla (izq, der) como $izq \Rightarrow der$.*

Un sistema de rescritura es un conjunto finito de reglas de rescritura.