<u>Posible solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de junio de 2005</u>

Problema 1 (3,5 puntos):

Dos bolas blancas están colocadas en una mesa al lado de una bolsa que contiene una bola blanca y dos negras. Reiteradamente se extrae una bola de la bolsa que se coloca a derecha de las dos anteriores y después se devuelve a la bolsa la bola de la izquierda. Determinar:

a) El diagrama de transición de estados y la matriz de transición de una cadena de Markov que modele esta situación.
b) El número medio de bolas blancas que hay a la larga fuera de la bolsa.

Solución:

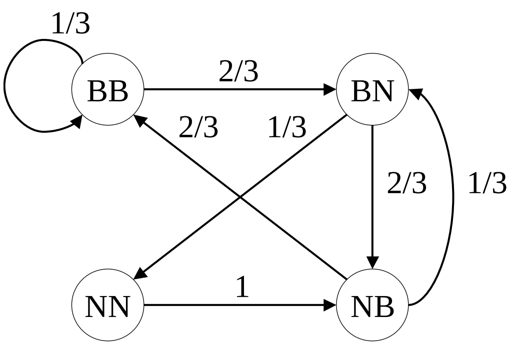
Apartado a):

Sabiendo de qué color son las bolas que están fuera de la bolsa, podemos deducir las que hay dentro. Por lo tanto, los estados serán de la forma ID, donde I es el color de la bola que está fuera y a la izquierda, y D es el color de la bola que está fuera y a la derecha.

El conjunto de estados será: S={BB, BN, NB, NN}. La matriz de transición correspondiente es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El diagrama de transición de estados (DTE) correspondiente es el que sigue:



Apartado b):

Como esta cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria. Debemos hallar dicha distribución estacionaria, ya que nos dirá qué probabilidad hay de encontrarse en cada estado (a la larga), y estas probabilidades serán necesarias para hallar el número medio de bolas blancas fuera de la bolsa. Para calcular la distribución estacionaria, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_{BB} \\ p_{BN} \\ p_{NB} \\ p_{NN} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_{BB} \\ p_{BN} \\ p_{NB} \\ p_{NN} \end{pmatrix}$$
$$p_{BB} + p_{BN} + p_{NB} + p_{NN} = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando p_{BB}=1 y normalizando luego. La solución final del sistema es:

$$p_{BB} = \frac{3}{10}; p_{BN} = \frac{3}{10}; p_{NB} = \frac{3}{10}; p_{NN} = \frac{1}{10}$$

Lo que nos piden es la esperanza de la variable aleatoria cuyo valor es el número de bolas blancas fuera de la bolsa. Dicha esperanza será:

$$E[\text{Número de bolas blancas}] = 2p_{BB} + p_{BN} + p_{NB} + 0 \cdot p_{NN} =$$
$$2\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ bolas}$$

Problema 2 (3,25 puntos):

La dirección de la biblioteca de una universidad está decidiendo cuántas copiadoras debe instalar para el uso de los estudiantes. Cada copiadora es capaz de hacer hasta 3 copias por minuto, teniendo en cuenta los retrasos debidos al tiempo necesario para insertar monedas, cambiar originales, etc. Por término medio llega un estudiante por minuto, y cada estudiante hace como media cinco copias.

a) Si se pone una sola copiadora, ¿se satura el sistema?
b) Si se ponen dos copiadoras, ¿cuál es el tiempo medio de espera en la cola?
c) Si se pretende que los estudiantes no esperen más de dos minutos como promedio en la cola para hacer copias, ¿cuántas copiadoras se deben instalar?

Solución:

Se trata de un sistema M/M/c, donde c es el número de copiadoras y λ = 1 cliente/min. Como cada copiadora hace 3 copias por minuto, en promedio puede atender a 3/5=0,6 clientes por minuto. Por consiguiente μ = 3/5 clientes/min.

Apartado a):

En este caso c=1. Usando las fórmulas del modelo M/M/1, $\rho = \lambda/\mu = 5/3 \geq 1$. Por tanto no se cumple la condición de no saturación. Es decir, el sistema se satura.

Apartado b):

Ahora tenemos c=2. Debemos hallar W_q:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333333$$

$$p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\frac{2^2 \rho^2}{2!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{1} \frac{(2\rho)^n}{n!} \right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{2\rho^2}{1-\rho} + 1 + 2\rho \right)^{-1} = \left(\frac{2\rho^2 + 1 - \rho + 2\rho - 2\rho^2}{1-\rho} \right)^{-1} = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right)^{-1} = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1/6}{11/6} = \frac{1}{11} \approx 0{,}090909$$

$$L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2} = \frac{2^2 \rho^3 \, 1/11}{2(1-\rho)^2} = \frac{2\left(5/6\right)^3}{11 \cdot \left(1/6\right)^2} = \frac{2 \cdot 5^3}{11 \cdot 6} = \frac{125}{33} \approx 3{,}787878 \text{ clientes}$$

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{125/33}{1} = \frac{125}{33} \approx 3{,}787878 \text{ min}$$

Apartado c):

Tenemos que hallar el menor número de servidores c tal que $W_q \leq 2$ min. Hemos visto en los dos anteriores apartados que $c = 1$ no sirve porque el sistema se satura y $c = 2$ tampoco porque $W_q > 2$ min. Probamos entonces con $c = 3$:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1}{3 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{5}{9} \approx 0{,}5555556$$

$$p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\frac{3^3 \rho^3}{3!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{2} \frac{(3\rho)^n}{n!} \right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{3^2 \rho^3}{2(1-\rho)} + 1 + 3\rho + \frac{3^2}{2}\rho^2 \right)^{-1} = \left(\frac{9\rho^3 + 2 - 2\rho + 6\rho - 6\rho^2 + 9\rho^2 - 9\rho^3}{2(1-\rho)} \right)^{-1} = \left(\frac{2 + 4\rho + 3\rho^2}{2(1-\rho)} \right)^{-1} =$$

$$\frac{2(1-\rho)}{2 + 4\rho + 3\rho^2} = \frac{2 \cdot \frac{4}{9}}{2 + \frac{20}{9} + \frac{75}{81}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 81 + 20 \cdot 9 + 75} = \frac{72}{417} = \frac{24}{139} \approx 0{,}172662$$

$$L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2} = \frac{3^3 \rho^4 \left(24/139\right)}{6(1-\rho)^2} = \frac{9 \cdot \left(5/9\right)^4 \cdot \left(24/139\right)}{2 \cdot \left(4/9\right)^2} =$$

$$\frac{5^4 \cdot 24}{2 \cdot 4^2 \cdot 9 \cdot 139} = \frac{5^4}{4 \cdot 3 \cdot 139} = \frac{625}{1668} \approx 0{,}3747002 \text{ clientes}$$

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{625/1668}{1} = \frac{625}{1668} \approx 0{,}3747002 \text{ min}$$

Observamos que $c = 3$ es el menor número de servidores para el que $W_q < 2$ min, con lo cual la solución es poner 3 copiadoras.

Problema 3 (1,75 puntos):

Sea el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $x_1 + x_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 48 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva dicho problema mediante el método del Simplex, siguiendo estos pasos:

a) Construya una solución factible inicial (tabla inicial del método).
b) Obtenga la(s) solución(es) óptima(s), si las hay.
c) ¿De qué tipo es la(s) solución(es) óptima(s) obtenida(s), si las hay?

Solución:

Apartado a):

Pasando a forma estándar queda:

Maximizar $x_1 + x_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 24 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_5 &= 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Podemos formar la primera base con las variables x_3, x_4 y x_5, con lo cual obtenemos la primera tabla:

			1	1	0	0	0
Base	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	9	1	1	1	0	0
P_4	0	24	3	2	0	1	0
P_5	0	48	4	6	0	0	1
		0	–1	–1	0	0	0

Apartado b):

Aplicamos el resto del método, partiendo de la tabla inicial que construimos en el apartado anterior:

Criterio de entrada: mín{–1,–1} = –1. Al haber empate, podemos elegir que entre x_1 ó x_2 indistintamente. Elegimos que entre x_1.

Criterio de salida: mín{9/1, 24/3, 48/4}=24/3, luego sale x_4.

			1	1	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_3	0	1	0	1/3	1	–1/3	0
P_1	1	8	1	2/3	0	1/3	0
P_5	0	16	0	10/3	0	–4/3	1
		8	0	–1/3	0	1/3	0

Criterio de entrada: mín{–1/3} = –1/3, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{1·3/1, 8·3/2, 16·3/10}=1·3/1, luego sale x_3.

			1	1	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_2	1	3	0	1	3	–1	0
P_1	1	6	1	0	–2	1	0
P_5	0	6	0	0	–10	2	1
		9	0	0	1	0	0

Observamos que la condición de parada se cumple, con lo cual la tabla es óptima. La solución óptima correspondiente es $\mathbf{x}_H = (6, 3, 0, 0, 6)^T$.

No obstante, también se comprueba que hay un cero en la última fila en una columna de una variable que no es de la base, x_4. Esto significa que introduciendo x_4 en la base obtendremos una nueva tabla óptima:

Criterio de salida: mín{6/1, 6/2}=6/2, luego sale x_5.

			1	1	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_2	1	6	0	1	–2	0	1/2
P_1	1	3	1	0	3	0	–1/2
P_4	0	3	0	0	–5	1	1/2
		9	0	0	1	0	0

La solución óptima de esta segunda tabla óptima es $\mathbf{x}_I = (3, 6, 0, 3, 0)^T$. Las infinitas soluciones óptimas de este problema serán los puntos del segmento cuyos extremos son $\mathbf{x}_H$ y $\mathbf{x}_I$:

$$\lambda_H \mathbf{x}_H + \lambda_I \mathbf{x}_I \text{ , donde } \lambda_H , \lambda_I \in [0,1], \lambda_H + \lambda_I = 1$$

Apartado c):

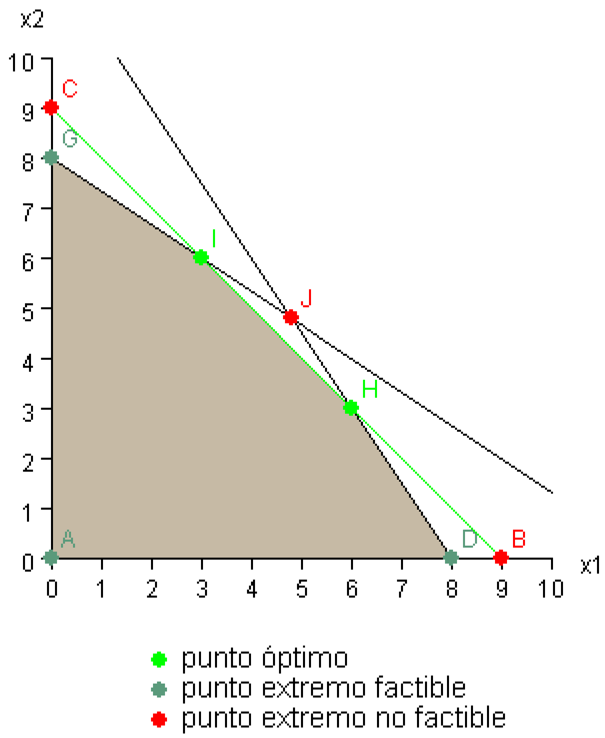
Como acabamos de ver en el apartado anterior, se trata de un problema con infinitas soluciones óptimas.

Aunque no se pide, a continuación incluimos la solución por el método gráfico de este problema (puntos de corte y representación gráfica). Nótese que la penúltima tabla se corresponde con un punto extremo en la gráfica, es decir, un vértice de la región factible, que es el punto H. Del mismo modo, la última tabla se corresponde con el punto I.

Soluciones para los puntos extremos

Punto	x1	x2	S1	S2	S3	Z
A	0.0	0.0	9.0	24.0	48.0	0.0
B	9.0	0.0	0.0	-3.0	12.0	9.0
C	0.0	9.0	0.0	6.0	-6.0	9.0
D	8.0	0.0	1.0	0.0	16.0	8.0
E	0.0	12.0	-3.0	0.0	-24.0	12.0
F	12.0	0.0	-3.0	-12.0	0.0	12.0
G	0.0	8.0	1.0	8.0	0.0	8.0
H	6.0	3.0	0.0	0.0	6.0	9.0
I	3.0	6.0	0.0	3.0	0.0	9.0
J	4.8	4.8	-0.6	0.0	0.0	9.6

Región factible



Problema 4 (1,5 puntos):

Una tienda de informática observa que la demanda de cajas de CD's varía cada dos meses a lo largo del año según la siguiente tabla:

Período	Ene-Feb	Mar-Abr	May-Jun	Jul-Ago	Sep-Oct	Nov-Dic
Demanda	100	230	100	235	100	200

La tienda dispone de dos proveedores de cajas de CD's: el proveedor A es capaz de suministrar en cada período hasta 70 cajas y vende cada unidad a 10,2 euros, mientras que el proveedor B puede suministrar en cada período hasta 100 cajas y las vende a 10,3 euros cada una. Es posible almacenar en la tienda cajas de CD's para venderlas en períodos posteriores, pero cada caja que llega en un período y es almacenada para ser vendida en el siguiente período supone un costo de 0,5 euros.

Plantear un modelo de programación lineal para decidir cuántas cajas se le compran a cada proveedor en cada uno de los 6 períodos, de tal manera que se minimicen los costos totales para la tienda. Se supone que el almacén empieza vacío en enero, y que tampoco se puede guardar nada para después de diciembre.

<u>Nota: No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.</u>

Solución:

Para cada período i, con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sean las variables de decisión:

- x_i representando el número de cajas compradas al proveedor A al inicio del período i-ésimo.
- y_i representando el número de cajas compradas al proveedor B al inicio del período i-ésimo.
- z_i representando el número de cajas almacenadas durante el período i-ésimo.

Como el almacén debe quedar vacío al final de diciembre, tenemos que $z_6 = 0$. El modelo de programación lineal será:

$$\text{Minimizar } 10{,}2\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 10{,}3\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) + 0{,}5\,(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
x_1 + y_1 &= 100 + z_1 \\
x_2 + y_2 + z_1 &= 230 + z_2 \\
x_3 + y_3 + z_2 &= 100 + z_3 \\
x_4 + y_4 + z_3 &= 235 + z_4 \\
x_5 + y_5 + z_4 &= 100 + z_5 \\
x_6 + y_6 + z_5 &= 200
\end{aligned}$$

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(0 \le x_i \le 70) \wedge (0 \le y_i \le 100) \wedge (0 \le z_i)$

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x_i , y_i , z_i \in \mathbf{Z}$

$z_6 = 0$

Nótese que las seis primeras restricciones expresan el equilibrio que debe haber entre las cajas "entrantes" (miembros izquierdos) y "salientes" (miembros derechos) durante cada uno de los seis períodos.

Como las variables de decisión han de tomar valores enteros, se trata de un problema de programación lineal entera.

FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:

M/M/1: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \rho^n(1-\rho)$; $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

M/M/c: $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $p_0 = \left(\dfrac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}$; $L_q = \dfrac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{ si } n = 0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c: $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

M/M/1/k: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1-p_k)$

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef} W_q$; $L = \lambda_{ef} W$; $L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$