Posible solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de junio de 2007

Problema 1: (*3 puntos)*

En un laboratorio se analizan las probabilidades de que un átomo radioactivo se convierta en un átomo de otro tipo, transcurrido un minuto. Cada minuto, un átomo de Bismuto-212 tiene una probabilidad 0,99 de seguir siendo Bismuto-212, una probabilidad 0,007 de convertirse en Plomo-208 y una probabilidad 0,003 de convertirse en Talio-208. Cada minuto, un átomo de Talio-208 tiene una probabilidad 0,8 de seguir siendo Talio-208 y una probabilidad 0,2 de convertirse en Plomo-208. El Plomo-208 es estable, es decir, nunca se convierte en otra cosa.

a) Matriz de transición y diagrama de transición de estados (DTE). Clasificar los estados y la cadena de Markov.
b) Si empezamos con un átomo de Bismuto-212, ¿cuántos minutos transcurrirán como promedio antes de que llegue a ser Plomo-208?
c) Si empezamos con un átomo de Talio-208, ¿cuántos minutos transcurrirán como promedio antes de que llegue a ser Plomo-208?

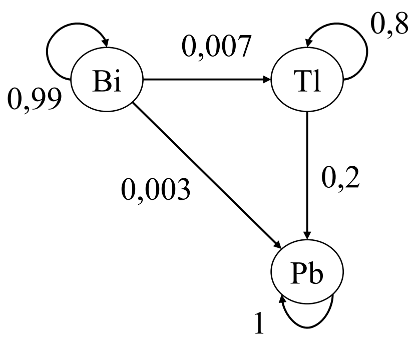
Solución:

Apartado a):

El conjunto de los posibles estados del átomo en estudio es: S={Bi, Tl, Pb}, que se corresponden a Bismuto-212, Talio-208 y Plomo-208, respectivamente. La matriz de transición será la siguiente:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}003 & 0{,}007 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El DTE correspondiente es:



La clasificación de los estados será:

Transitorios: Bi, Tl
Recurrentes: Pb
Periódicos: ninguno
Absorbentes: Pb

La CM se clasifica como sigue. No es irreducible (debido al conjunto cerrado {Pb}), y por tanto no es recurrente, ni transitoria, ni periódica, ni aperiódica, ni ergódica. Sí es absorbente.

Apartado b):

Nos piden calcular el número medio de etapas que se estará en los estados transitorios Bi y Tl antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio Bi∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor viene dado por la suma de los elementos (1,1) y (1,2) de $(I–Q')^{-1}$.

Se observa que los elementos de S ya están ordenados como se requiere para hacer los cálculos, es decir, primero los estados transitorios y después los absorbentes. Por lo tanto la matriz *Q'* será la siguiente:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}003 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

La matriz cuyos elementos necesitamos es la siguiente:

$$(I - Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}003 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 1{,}5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

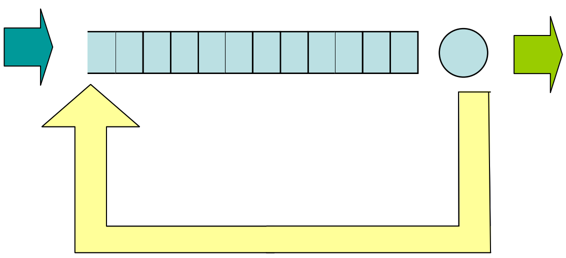
El número medio de etapas antes de la absorción será 100+1,5=101,5 etapas=101,5 minutos. Es decir, un átomo de Bismuto-212 tarda como media 101,5 minutos en convertirse en un átomo de Plomo-208.

Apartado c):

Nos piden calcular el número medio de etapas que se estará en el estado transitorio Tl∈S antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio Tl∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor es el elemento (2,2) de $(I–Q')^{-1}$. Como $(I–Q')^{-1}$ ya fue calculado en el apartado b), obtenemos sin hacer más cálculos que un átomo de Talio-208 tarda como media 5 minutos en convertirse en un átomo de Plomo-208.

<u>Problema 2</u>: (*3 puntos*)

Un ordenador almacena en una cola los paquetes de información que están pendientes de enviar mediante un módem. El módem es capaz de transmitir paquetes a razón de 5 paquetes por segundo, con un tiempo de servicio exponencial. El 95% de los paquetes que se emiten llegan a su destino correctamente, mientras que el 5% sufre errores y deben ser colocados de nuevo al final de la cola para su retransmisión. Por otro lado, a la cola llegan paquetes nuevos para ser transmitidos a razón de 2 paquetes por segundo, siguiendo un proceso de Poisson. El siguiente diagrama especifica la configuración del sistema de colas:



a) ¿Cuánto tiempo pasa por término medio en el sistema un paquete desde que llega por primera vez a la cola hasta que es transmitido sin error?

b) ¿Cuántos paquetes hay por término medio en la cola?

c) ¿Cuántos paquetes hay por término medio en el sistema?

Solución:

Apartado a):

El sistema es una red de colas (red de Jackson abierta) que tiene un único nodo (nodo 1) que es una cola M/M/1. Según el diagrama tenemos una única entrada a la red: γ_1 = 2 clientes/seg. Esto quiere decir que la tasa de llegadas a la red es $\lambda_{red} = \gamma_1 = 2$ clientes/seg.

Nos piden hallar el tiempo medio de respuesta de la red de colas, notado W_{red}, para lo cual necesitamos conocer L_{red}, que para esta cola con un solo nodo coincidirá con el número medio de trabajos L_1 para el nodo 1. En primer lugar hallaremos la tasa de llegada al nodo 1 mediante la ecuación de equilibrio:

$$\lambda_1 = \gamma_1 + 0{,}05\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 0{,}05\lambda_1 \Rightarrow 0{,}95\lambda_1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{0{,}95} = \frac{40}{19} \approx 2{,}1052 \text{ clientes/seg}$$

Hallamos el parámetro ρ para el nodo 1, teniendo en cuenta que la tasa de servicio del único servidor del nodo 1 es μ_1=5 clientes/seg:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{40}{19 \cdot 5} = \frac{8}{19} \approx 0{,}4210$$

Hallamos el número medio de clientes en el sistema para una cola M/M/1 a partir de las fórmulas que aparecen al final del examen:

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda W_q + \rho = L_q + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho^2 + \rho - \rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Por lo tanto tendremos que:

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{8/19}{11/19} = \frac{8}{11} \approx 0{,}7272 \text{ clientes}$$

Como hemos dicho, $L_{red} = L_1$. Ahora podemos aplicar el teorema de Little a la red de colas:

$$W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}} = \frac{8/11}{2} = \frac{8}{22} \approx 0{,}3636 \text{ seg}$$

Apartado b):

Nos piden el número medio de clientes en el nodo 1. Al final del examen tenemos una fórmula para calcularlo:

$$L_{q1} = \frac{\rho_1^{\,2}}{1-\rho_1} = \frac{\left(8/19\right)^2}{11/19} = \frac{64}{11 \cdot 19} = \frac{64}{209} \approx 0{,}3062 \text{ clientes}$$

Apartado c):

En el apartado a) se vio que el número medio de clientes en el sistema es $L_{red} = L_1$. Dicho parámetro ya fue calculado en ese apartado:

$$L_{red} = \frac{8}{11} \approx 0{,}7272 \text{ clientes}$$

<u>Problema 3</u>: (*2 puntos)*

Disponemos de 210.000 € para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 € en las de tipo A y, como mínimo, 6.000 € en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. Determinar mediante el método gráfico:

a) Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo beneficio anual.

b) El valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

Apartado a):

Variables de decisión:

x_A = Inversión en acciones A (en €)
x_B = Inversión en acciones B (en €)

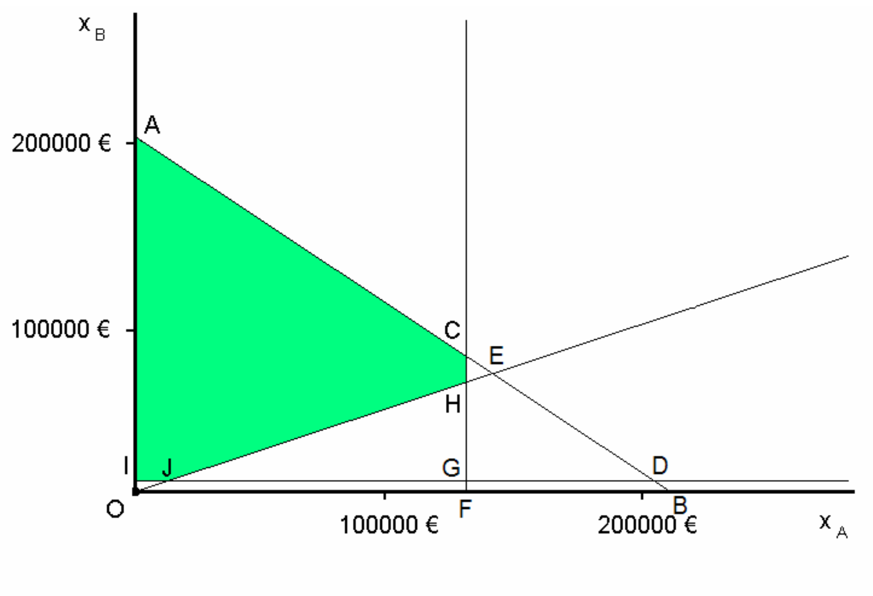
Restricciones:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\le 210000 \\ x_A &\le 130000 \\ x_B &\ge 6000 \\ x_A - 2x_B &\le 0 \\ x_A, x_B &\ge 0 \end{aligned}$$

Función objetivo que maximizar:

$$F(x_A, x_B) = 0{,}1\, x_A + 0{,}08\, x_B$$

El gráfico correspondiente será (región factible en verde):



Los puntos extremos que aparecen en el gráfico son los siguientes:

Punto	x_A	x_B	**Valor *F***
O	0	0	0
A	0	210000	16800
B	210000	0	21000
C	130000	80000	19400
D	204000	6000	20880
E	140000	70000	19600
F	130000	0	13000
G	130000	6000	13480
H	130000	65000	18200
I	0	6000	480
J	12000	6000	1680

De entre los puntos listados, los factibles son A, C, H, I, J. El punto que es solución óptima única es C, que se corresponde con una inversión en acciones A de 130.000 € y una inversión en acciones B de 80.000 €.

Apartado b):

El valor del beneficio máximo es el valor de la función objetivo *F* en el punto C. En este caso será de 19.400 €.

Problema 4: **(*2 puntos)***

Un comedor desea diseñar un menú para sus comensales a costo mínimo pero proporcionando al menos 2000 kilocalorías de energía, 55 gramos de proteína y 800 miligramos de calcio. Para ello dispone de los siguientes productos con sus valores por ración:

Producto	Energía (Kcal)	Proteína (g)	Calcio (mg)	Precio (€)
Pan	110	4	2	1
Pollo	201	32	12	3
Huevo	160	13	54	2,5
Leche	160	8	285	2,1
Tarta	420	4	22	4,1
Estofado	260	14	80	2,3

Además se precisa que en el menú propuesto no se incluyan más de 4 raciones de pan, ni más de 3 de pollo, ni más de 2 de huevo, ni más de 8 de leche, ni más de 2 de tarta, ni más de 2 de estofado.

Formular un programa lineal que permita conocer cuántas raciones de cada producto se deben incluir en el menú para minimizar el coste total.

<u>Nota: No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.</u>

Solución:

Las variables de decisión serán el número de raciones de cada producto que entrarán en el menú:

x_i = nº de raciones del producto i que se incluyen en el menú

donde los nombres de los productos se abrevian: $i \in \{Pa, Po, H, L, T, E\}$.

La función objetivo a minimizar será el coste total (en euros) del menú:

$1 \cdot x_{Pa} + 3 \cdot x_{Po} + 2{,}5 \cdot x_H + 2{,}1 \cdot x_L + 4{,}1 \cdot x_T + 2{,}3 \cdot x_E$

En primer lugar, debemos asegurarnos de que el número de raciones de cada producto es un número entero y no negativo:

$\forall\ i \in \{Pa, Po, H, L, T, E\},\ x_i \in \mathbf{Z}$

$\forall\ i \in \{Pa, Po, H, L, T, E\},\ x_i \geq 0$

Además debemos asegurar que no se sobrepasan los números máximos de raciones de cada producto:

$x_{Pa} \leq 4,\ \ x_{Po} \leq 3,\ \ x_H \leq 2,\ \ x_L \leq 8,\ \ x_T \leq 2,\ x_E \leq 2.$

Por último, debemos asegurarnos de que los aportes de los distintos nutrientes están por encima de los valores mínimos requeridos:

Energía (Kcal):	$110\ x_{Pa} + 201\ x_{Po} + 160\ x_H + 160\ x_L + 420\ x_T + 260\ x_E \geq 2000$
Proteína (g):	$4\ x_{Pa} + 32\ x_{Po} + 13\ x_H + 8\ x_L + 4\ x_T + 14\ x_E \geq 55$
Calcio (mg):	$2\ x_{Pa} + 12\ x_{Po} + 54\ x_H + 285\ x_L + 22\ x_T + 80\ x_E \geq 800$

<u>FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:</u>

M/M/1: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $\quad p_n = \rho^n (1-\rho)$; $\quad L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $\quad W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

M/M/c: $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $\quad p_0 = \left(\dfrac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}$; $\quad L_q = \dfrac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{si } n = 0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

M/M/1/k: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_k)$

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef} W_q$; $L = \lambda_{ef} W$; $L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$

Redes de Jackson abiertas:

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i \; ; \quad L_{red} = \sum_{i=1}^{K} L_i \; ; \quad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}} \; ; \quad V_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{red}}$$

Redes de Jackson cerradas:

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{c_j \mu_j} \; ; \qquad L_j(m) = m \frac{\lambda_j^* W_j(m)}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* W_i(m)} \; ; \qquad \lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)} \; ;$$

$$L_j(0) = 0$$