Investigación Operativa de Sistemas
I.T. Informática de Sistemas
10 de Junio de 2011

<u>Problema 1 (3 puntos)</u>:

Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
x+y &\leq 120 \\
3y &\leq x \\
x &\leq 100 \\
y &\geq 10
\end{aligned}
$$

Se pide:

a) Represente gráficamente la región factible, y calcule sus vértices.

b) ¿En qué punto de la región factible la función

$$F(x, y) = 25x+20y$$

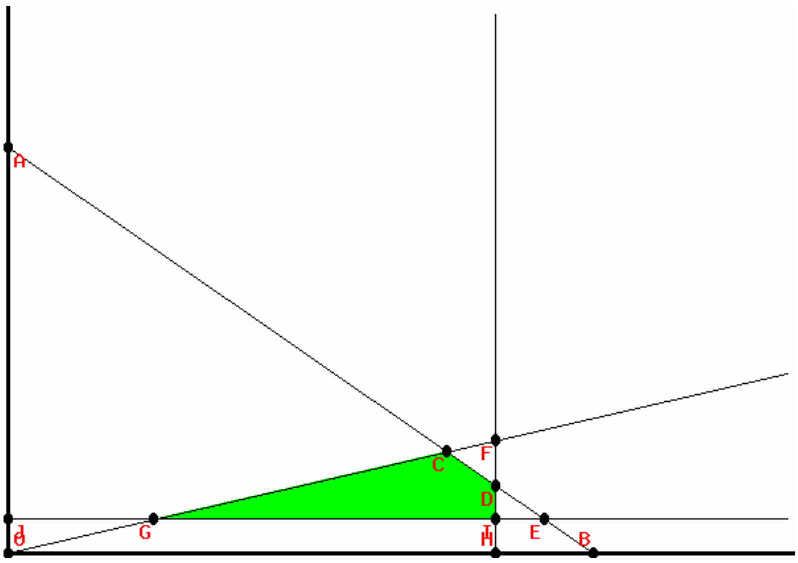
alcanzaría su valor máximo?

c) Formule la primera tabla correspondiente a la aplicación del algoritmo del Simplex para este problema. ¿Qué método se debe aplicar aquí?

<u>Solución:</u>

Apartado a):

La representación gráfica queda como sigue:



Los vértices son:

G(30,10): intersección de las rectas y = 10 y x = 3y.

C(90,30): intersección de las rectas x + y = 120 y x = 3y
D(100,20): intersección de las rectas x + y = 120 y x = 100
I(100,10): intersección de las rectas y = 10 y x = 100

Apartado b):

Hallamos el valor de la función objetivo en los vértices de la región factible:

F(G) = F(30,20) = 25*30 + 20*10 = 950
F(C) = F(90,30) = 25*90 + 20*30 = 2850
F(D) = F(100,20) = 25*100 + 20*20 = 2900
F(I) = F(100,10) = 25*100 + 20*10 = 2700

El valor máximo se alcanza por lo tanto en el punto D(100,20).

Apartado c):

Se utiliza el método de las dos fases. El problema auxiliar de la Fase I es:

Maximizar $-x_7$
Sujeto a:

$$
\begin{array}{lcr}
x_1 + x_2 + x_3 & = & 120 \\
-x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 0 \\
x_1 + x_5 & = & 100 \\
x_2 - x_6 + x_7 & = & 10 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Téngase en cuenta que x=x_1, y=x_2. Las variables x e y no tienen restricción de no negatividad explícita en el problema original, pero dicha restricción se deduce de las restricciones $y \geq 10$, $3y \leq x$. Por lo tanto no es necesario añadir más variables auxiliares que las que aparecen.

La primera tabla es la siguiente:

			0	0	0	0	0	0	–1
Base	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_3	0	120	1	1	1	0	0	0	0
P_4	0	0	–1	3	0	1	0	0	0
P_5	0	100	1	0	0	0	1	0	0
P_7	–1	10	0	1	0	0	0	–1	1
		–10	0	–1	0	0	0	1	0

Problema 2 (3 puntos):

Sandra tiene 30 céntimos, y desea a toda costa comprarse una bolsa de patatas fritas que cuesta 80 céntimos. Héctor está dispuesto a hacer apuestas con ella. En cada ocasión, si Sandra apuesta *x* céntimos, tiene una probabilidad de 0,5 de ganar *x* céntimos y una probabilidad de 0,5 de perder los *x* céntimos que ha apostado. La estrategia de Sandra es apostar tanto como sea posible, pero no más de lo necesario para llegar a tener 80 céntimos. El juego acaba cuando Sandra se arruina o bien consigue su bolsa de patatas fritas. Se pide:

a) Modelar la situación mediante una cadena de Markov.
b) Probabilidad de que Sandra consiga su bolsa de patatas fritas.
c) Número medio de apuestas hasta que el juego termina.

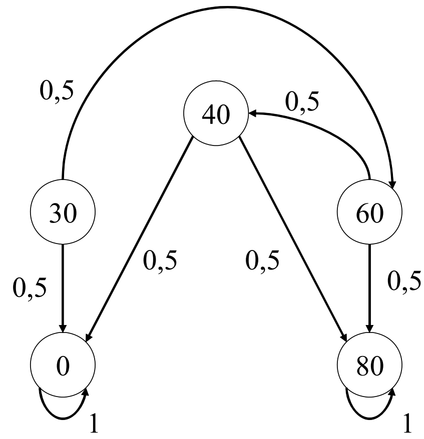
Solución:

Apartado a):

El conjunto de estados posibles del juego es: S={30, 40, 60, 0, 80}, donde cada número indica cuantos céntimos tiene Sandra. La matriz de transición será la siguiente:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El DTE correspondiente es:



La clasificación de los estados será:
Transitorios: 30, 40, 60
Recurrentes: 0, 80
Periódicos: ninguno
Absorbentes: 0, 80

La CM se clasifica como sigue. No es irreducible (debido a los conjuntos cerrados {0} y {80}), y por tanto no es recurrente, ni transitoria, ni periódica, ni aperiódica, ni ergódica. Sí es absorbente.

Apartado b):

Nos piden calcular la probabilidad de acabar en el estado absorbente 80∈S, suponiendo que empezamos en el estado transitorio 30∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor es el elemento (1,2) de la matriz fundamental de la cadena, $(I-Q')^{-1}R$.

Se observa que los elementos de S ya están ordenados como se requiere para hacer los cálculos, es decir, primero los estados transitorios y después los absorbentes. Por lo tanto las matrices *Q'* y *R* serán las siguientes:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

A continuación calculamos la inversa:

$$(I-Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por último la matriz fundamental:

$$(I-Q')^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Así pues, la probabilidad pedida es 0,375=3/8.

Apartado c):

Nos piden calcular el número medio de etapas que se estará en los estados transitorios 30, 40 y 60 antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio 30∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor viene dado por la suma de los elementos (1,1), (1,2) y (1,3) de $(I-Q')^{-1}$.

El número medio de etapas antes de la absorción será:

$$E[Etapas] = 1 + 0,25 + 0,5 = 1,75 \text{ etapas}$$

Es decir, por término medio el juego acaba tras haber apostado 1,75 veces.

<u>Problema 3 (4 puntos):</u>

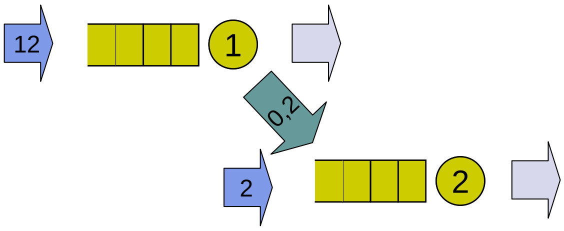
En una estación de servicio hay dos colas: una para repostar carburante (hay un único surtidor), y otra para lavar vehículos (hay un único túnel de lavado). Cada hora llegan desde la carretera por término medio 12 vehículos a la cola de repostar, y 2 vehículos a la cola de lavar. El 20% de los vehículos que terminan de repostar pasan a la cola de lavar; el resto se va. Todos los vehículos que terminan de lavar se van. El tiempo medio que se tarda en repostar es 4 minutos, y el tiempo medio que se tarda en lavar es 12 minutos.

a) Modelar la situación mediante una red de colas.
b) Determinar si la red se satura.
c) Número medio de vehículos en la estación de servicio.
d) Tiempo medio que un vehículo pasa en la estación de servicio.

Solución:

Apartado a):

El sistema es una red de colas (red de Jackson abierta) que tiene dos nodos: el nodo 1 es para repostar, y el nodo 2 para lavar. Ambos nodos son colas M/M/1. El diagrama es como sigue:



Según el diagrama tenemos dos entradas a la red: γ_1 = 12 clientes/h, γ_2 = 2 clientes/h. Esto quiere decir que la tasa de llegadas a la red es $\lambda_{red} = \gamma_1 + \gamma_2$ = 14 clientes/h. El tiempo medio de servicio en el nodo 1 es $1/\mu_1$=4 min=1/15 h≈0,06667 h, y en el nodo 2 es $1/\mu_2$=12 min=1/5 h=0,2 h.

Apartado b):

Para saber si la red se satura primero tenemos que resolver las ecuaciones de equilibrio:

Nodo 1: $\lambda_1 = \gamma_1$

Nodo 2: $\lambda_2 = \gamma_2 + 0,2\lambda_1$

La solución de dichas ecuaciones es: λ_1 =12 clientes/h, λ_2 =4,4 clientes/h. Por lo tanto, los parámetros ρ para los nodos de la red son:

$$\rho_1 = \lambda_1 \frac{1}{\mu_1} = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\rho_2 = \lambda_2 \frac{1}{\mu_2} = 4,4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{44}{50} = 0,88$$

Como todos los parámetros son estrictamente menores que uno, la red de colas no se satura.

Apartado c):

Nos piden hallar el número medio de clientes en la red de colas, L_{red}. Para ello tenemos que sumar los números medios de clientes en ambos nodos:

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda W_q + \rho = L_q + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0,8}{1-0,8} = \frac{0,8}{0,2} = 4 \text{ clientes}$$

$$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0,88}{1-0,88} = \frac{0,88}{0,12} = \frac{22}{3} \approx 7,3333 \text{ clientes}$$

$$L_{red} = L_1 + L_2 = 4 + \frac{22}{3} = \frac{34}{3} \approx 11,3333 \text{ clientes}$$

Apartado d):

Nos piden hallar el tiempo medio de respuesta de la red de colas, W_{red}. Para ello aplicamos el teorema de Little a la red de colas:

$$L_{red} = \lambda_{red} W_{red} \Rightarrow W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}} = \frac{34/3}{14} = \frac{17}{21} \approx 0,8095 \text{ h} \approx 48,5714 \text{ min}$$

FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS

M/M/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad p_n = \rho^n(1-\rho); \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad W(t) = e^{-t/W} \quad W_q(t) = \rho e^{-t/W}$$

M/M/c

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}; \quad p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}; \quad L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{ si } n = 0,1,\ldots,c \\ \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad L_q = \lambda W_q; \quad L = \lambda W$$

M/M/1/k

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad L_q = \lambda_{ef} W_q; \quad L = \lambda_{ef} W; \quad \lambda_{ef} = \lambda(1-p_k)$$

Redes de Jackson abiertas

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i; \quad L_{red} = \sum_{i=1}^{K} L_i; \quad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}}; \quad V_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{red}}$$

Redes de Jackson cerradas

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{c_j \mu_j}; \quad L_j(m) = m \frac{\lambda_j^* W_j(m)}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* W_i(m)}; \quad \lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)};$$

$$L_j(0) = 0$$