Solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de septiembre de 2007

Problema 1: (*3 puntos)*

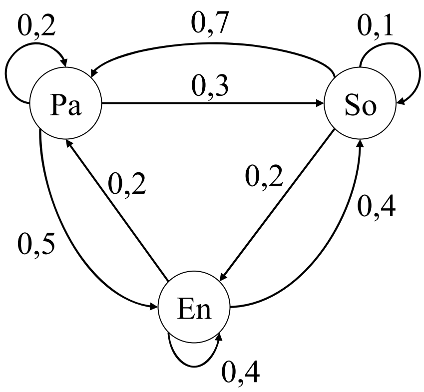
En un comedor universitario existen tres platos a elegir: Pasta, Sopa y Ensalada. Se ha determinado que si una persona elige pasta un día, al siguiente día volverá a tomar pasta con probabilidad 0,2; sopa con probabilidad 0,3 y ensalada con probabilidad 0,5. Si hoy elige sopa, mañana tomará sopa de nuevo con probabilidad 0,1; pasta con probabilidad 0,7 y ensalada con probabilidad 0,2. Por último, si un día toma ensalada, al siguiente tomará otra vez ensalada con probabilidad 0,4; pasta con probabilidad 0,2 y sopa con probabilidad 0,4.

a) Matriz de transición y diagrama de transición de estados (DTE). Clasificar los estados y la cadena de Markov.
b) Hallar la proporción de personas que toman cada tipo de plato un día cualquiera.
c) Si una persona ha tomado sopa hoy, ¿cuál es la probabilidad de que pasado mañana tome pasta?

Solución:

Apartado a):

Podemos modelar la situación mediante una cadena de Markov en la que cada etapa represente un día. Así pues, el estado *i* representará que hoy una persona ha tomado el plato *i* trabajos en la pila. Por lo tanto, el conjunto de estados es S = {Pa, So, En}. El DTE correspondiente es:



La matriz de transición será como sigue:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

En cuanto a la clasificación de los estados, todos son recurrentes y aperiódicos. Ninguno es absorbente. El único conjunto cerrado es S. Por tanto, la CM es irreducible, aperiódica y recurrente, con lo cual es ergódica.

Apartado b):

Como la cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria, que será necesaria para hallar la probabilidad de que una persona tome cada tipo de plato un día cualquiera, que es lo que nos piden. Para calcular la distribución, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_{Pa} \\ p_{So} \\ p_{En} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_{Pa} \\ p_{So} \\ p_{En} \end{pmatrix}$$

$$p_{Pa} + p_{So} + p_{En} = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando $p_{Pa}=1$ y normalizando luego. La solución final es:

$$p_{Pa} = \frac{46}{135} \approx 0{,}3407, \quad p_{So} = \frac{38}{135} \approx 0{,}2814, \quad p_{En} = \frac{17}{45} \approx 0{,}3777.$$

Éstas son las proporciones de personas que toman cada uno de los platos un día cualquiera, expresadas en tantos por uno.

Apartado c):

Según las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, la probabilidad de transitar desde el estado *So* hasta el estado *Pa* en dos etapas es:

$$q_{So,Pa}^{(2)} = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

<u>Problema 2</u>: (*3 puntos)*

Una gasolinera dispone de 2 surtidores. Los coches que van llegando se sitúan en una única cola, cuya capacidad podemos suponer infinita. El proceso de llegada de los coches a la gasolinera es un proceso de Poisson, de tal manera que van llegando a razón de cuatro coches por hora. El tiempo de servicio se distribuye exponencialmente, con media 10 minutos.

a) ¿Cuánto tiempo pasa por término medio en el sistema un coche?

b) ¿Cuántos coches hay por término medio en la cola?

c) ¿Cuántos coches salen de la gasolinera por término medio cada hora?

<u>Solución:</u>

Dado que tenemos una única cola con dos servidores (los dos surtidores), y que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio son exponenciales, el sistema es una cola M/M/2. Los parámetros del sistema son: c=2 servidores, λ=4 clientes/h, μ=6 clientes/h.

Apartado a):

Nos piden el tiempo medio de espera en el sistema, *W*. Para calcularlo tendremos que obtener previamente algunos resultados intermedios:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{4}{2\cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Como ρ<1, se cumple la condición de no saturación y podemos seguir calculando:

$$p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\frac{2^2 \frac{1}{9}}{2\frac{2}{3}} + 1 + \frac{2\frac{1}{3}}{1} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} + 1 + \frac{2}{3} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$p_0 = \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3} \right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2} = \frac{2^2 \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2}}{2\frac{4}{9}} = \frac{4\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 27\cdot 2} = \frac{1}{12} \text{ clientes (coches)}$$

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{48} \text{ h}$$

Ya podemos calcular lo que nos piden:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{48} + \frac{1}{6} = \frac{9}{48} = 0{,}1875 \text{ h} = 11{,}25 \text{ min}$$

Apartado b):

Nos piden la longitud media de la cola, que ya fue calculada en el apartado anterior: $L_q = \frac{1}{12}$ coches.

Apartado c):

Como la condición de no saturación se verifica, la longitud de la cola no puede tender a infinito. Por lo tanto el promedio de coches que salen debe ser igual al promedio de coches que entran, es decir, 4 coches/h.

Problema 3: (*2 puntos)*

Una empresa fabrica productos de dos tipos: A y B. Para fabricar cada unidad de A se necesitan 13 minutos de trabajo de una máquina y 20 minutos de trabajo de un especialista. Para fabricar cada unidad de B se necesitan 19 minutos de trabajo de una máquina y 29 minutos de trabajo de un especialista. La empresa dispone como máximo de 40 horas semanales de trabajo de la máquina y 35 horas semanales de trabajo del especialista. Cada hora que trabaja la máquina cuesta 10€, y cada hora de trabajo del especialista cuesta 2€. Cada unidad de A se vende por 20€ y cada unidad de B por 30€. La empresa tiene un contrato con un cliente por el cual debe fabricar al menos 10 unidades de A semanales. Determinar mediante el método gráfico:

a) Cuál tiene que ser la cantidad de cada tipo de producto que se debe fabricar semanalmente para obtener el máximo beneficio.

b) El valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

Apartado a):

Las variables de decisión serán:
x_A = unidades del producto A fabricadas semanalmente
x_B = unidades del producto B fabricadas semanalmente

La función objetivo que debemos maximizar es el beneficio neto, es decir, el valor de venta de los productos menos los costes de producción. En euros semanales, la función objetivo será

$$20\ x_A + 30\ x_B - 10(13\ x_A + 19\ x_B)/60 - 2(20\ x_A + 29\ x_B)/60$$

Simplificando queda (aproximadamente):

$$17{,}1667\ x_A + 25{,}8667\ x_B$$

Las restricciones del tiempo disponible de trabajo semanal de la máquina y del especialista serán, respectivamente (en minutos semanales):

$$13\ x_A + 19\ x_B \leq 40\cdot 60$$
$$20\ x_A + 29\ x_B \leq 35\cdot 60$$

Por otra parte, existe un mínimo de producción de A, y además las producciones no pueden ser negativas:

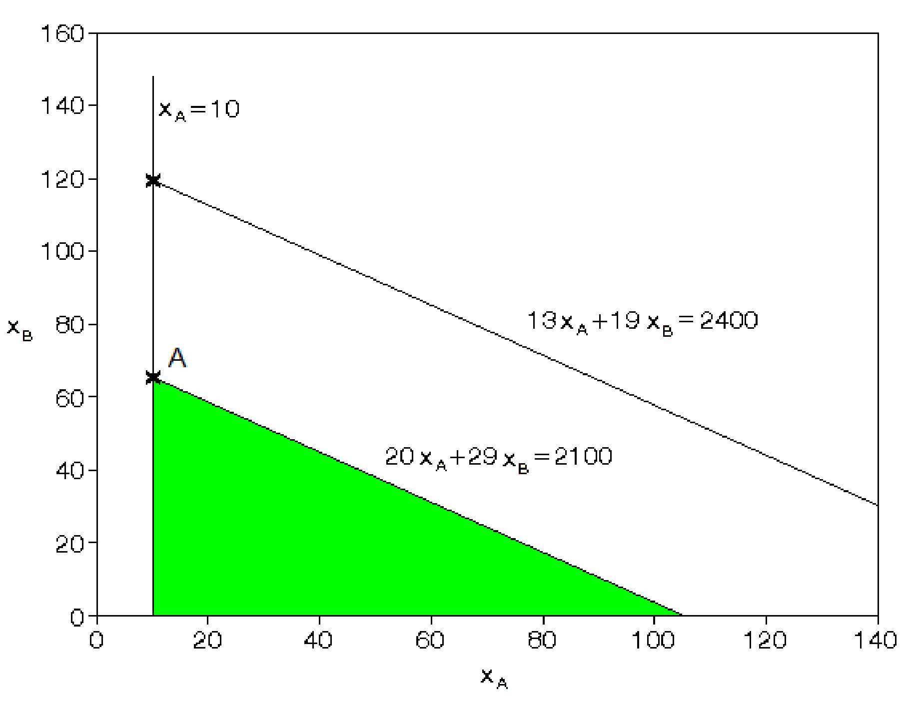
$$x_A \geq 10$$
$$x_A,\ x_B \geq 0$$

En resumen, el problema de programación lineal que debemos resolver es:

Maximizar $17{,}1667\ x_A + 25{,}8667\ x_B$
Sujeto a:
$13\ x_A + 19\ x_B \leq 2400$
$20\ x_A + 29\ x_B \leq 2100$
$x_A \qquad \geq 10$
$x_A,\ x_B \geq 0$

Según observamos en el diagrama, es claro que la solución optima única está en la intersección de las rectas $x_A = 10$, $20\ x_A + 29\ x_B = 2100$. Nótese que la región factible está pintada en verde.

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por ambas rectas, y la solución óptima única es $x_A = 10$ unidades, $x_B = \frac{1900}{29} \approx 65{,}5172\, x_B$ unidades (ignoramos la posibilidad de que no tenga sentido fabricar una cantidad no entera del producto B, lo cual nos llevaría a un problema de programación lineal entera). El punto donde se alcanza la solución óptima se ha señalado como A en la gráfica.



Apartado b):

El beneficio máximo es el valor de la función objetivo en la solución óptima. Sustituimos la solución optima en la function objetivo y obtenemos aproximadamente 1866,5 €/semana.

Problema 4: **(*2 puntos)***

El servicio de aguas de una ciudad dispone de cuatro manantiales, A, B C y D, para satisfacer la demanda de agua potable. La ciudad necesita 20 m^3/seg, que deberán obtenerse mezclando diferentes cantidades de agua de cada manantial. Las características de los manantiales y la composición de sus aguas son las siguientes:

Manantial	Bicarbonatos (mg/litro)	Sodio (mg/litro)	Calcio (mg/litro)	Coste (€/m^3)	Caudal máximo (m^3/seg)
A	18	4	5	0,5	3
B	124	15	32	0,4	10
C	35	12	8	0,3	4
D	208	5	78	0,1	50

Para que el agua suministrada a la ciudad cumpla los requisitos de calidad, se exige que la mezcla no contenga más de 70 mg/litro de bicarbonatos, no más de 10 mg/litro de sodio y no más de 60 mg/litro de calcio.

Formular un programa lineal que permita conocer cuánta agua debe sacarse de cada manantial para completar el suministro de la ciudad, de tal manera que el coste total sea mínimo.

<u>Nota: No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.</u>

Solución:

Las variables de decisión serán la cantidad de agua (caudal) que sacaremos de cada manantial para completar el suministro de la ciudad:

x_i = caudal sacado del manantial i (m^3/seg), donde $i \in \{A, B, C, D\}$.

La función objetivo a minimizar será el coste total del suministro a la ciudad (en €/seg):

$0{,}5 \cdot x_A + 0{,}4 \cdot x_B + 0{,}3 \cdot x_C + 0{,}1 \cdot x_D$

En primer lugar, debemos asegurarnos de que el caudal sacado de cada manantial es un número no negativo:

$\forall\ i \in \{A, B, C, D\},\ x_i \geq 0$

Por otra parte, debemos asegurar que se completa el suministro de la ciudad:

Suministro ciudad (m^3/seg): $x_A + x_B + x_C + x_D \geq 20$

Además debemos asegurar que no se sobrepasan los caudales máximos que pueden suministrar los manantiales:

Caudales máximos (m^3/seg): $x_A \leq 3,\ \ x_B \leq 10,\ \ x_C \leq 4,\ \ x_D \leq 50.$

Por último, debemos asegurarnos de que los contenidos en minerales del agua suministrada a la ciudad no supera los máximos permitidos. Para ello debemos tener en cuenta que el agua que se suministra a la ciudad es una mezcla de los aportes de los cuatro manantiales. Vamos a considerar la cantidad de minerales que lleva ese flujo de agua, expresada en gramos de minerales por segundo. Recordemos que 1 m^3 = 1000 litros, con lo cual 1 mg/litro = 1 g/m^3. Las restricciones serán:

Bicarbonatos (g/seg): $18x_A + 124x_B + 35x_C + 208x_D \leq 70(x_A + x_B + x_C + x_D)$

Sodio (g/seg): $4x_A + 15x_B + 12x_C + 5x_D \leq 10(x_A + x_B + x_C + x_D)$

Calcio (g/seg): $5x_A + 32x_B + 8x_C + 78x_D \leq 60(x_A + x_B + x_C + x_D)$

<u>FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:</u>

M/M/1: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \rho^n(1-\rho)$; $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

M/M/c: $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $p_0 = \left(\dfrac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}$; $L_q = \dfrac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{si } n = 0,1,\dots,c \\ \dfrac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c: $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

M/M/1/k: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n (1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_k)$

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef} W_q$; $L = \lambda_{ef} W$; $L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{si } \rho = 1 \end{cases}$

Redes de Jackson abiertas:

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i \,; \quad L_{red} = \sum_{i=1}^{K} L_i \,; \quad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}} \,; \quad V_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{red}}$$

Redes de Jackson cerradas:

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{c_j \mu_j} \,; \qquad L_j(m) = m \frac{\lambda_j^* W_j(m)}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* W_i(m)} \,; \qquad \lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)} \,;$$

$$L_j(0) = 0$$